数学圈丛书

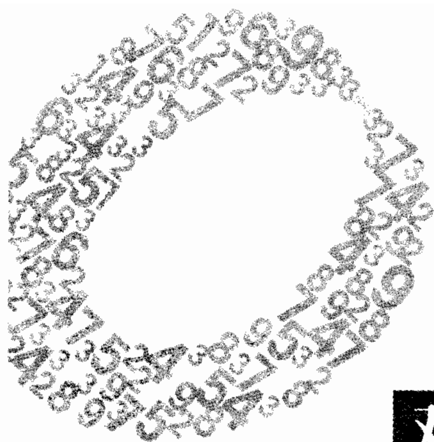
数学圈 2

Mathematical Circles Revisited & Mathematical Circles Squared

■【美】H·W·伊弗斯/著 ■李 泳/译



湖南科学技术出版社



欢迎你来数学圈

欢迎你来数学圈，那是我们熟悉而陌生的园地。

我们熟悉它，因为几乎每个人都走过多年的数学路，从123走到6月6（或7月7），从课堂走进考场。然后，我们把它留给最后一张考卷，解放的头脑，不再为它留一点儿空间。我们也陌生，模糊的记忆里，是残缺的公式和零乱的图形，是课堂的催眠曲，是考场的蒙汗药……去吧，那些被课本和考卷异化和扭曲了的数学；忘记那一朵朵恶之花，我们会迎来新的百花园。

“数学圈丛书”请大家走进数学圈，也走近数学圈子里的人。这是一套新视角下的数学读物，它不为专门传达任何具体的数学知识和解题技巧，而以“非数学的形式来普及数学”，着重宣扬数学和数学家的思想和精神。它的目的不是教人学数学，而是改变人们对数学和数学家的看法，把数学融入大众文化，回到人们的生活。读这些书不需要智力竞赛的紧张，而是要一点儿文艺欣赏的平和。你可以怀着360样心情来享受数学，经历它的趣味和生命，感悟符号背后的情感和人生。

没有人怀疑数学是文化的一部分，但诺大的“文化”，却往往将数学排除在外。当然，从人数来看，数学家在文

化人中顶多占一个测度为零的空间。但是，数学的每一点进步都影响着整个文明的根基。借一个历史学家的话说，“有谁知道，在微积分和路易十四时期的政治的朝代原则之间，在古典的城邦和欧几里得几何之间，在西方油画的空间透视和以铁路、电话、远距离武器制胜空间之间，在对位音乐和信用经济之间，原有深刻的一致关系呢?”（斯宾格勒《西方的没落·导言》）所以，数学不在象牙塔，就在身边。上帝用混乱的语言摧毁了石头的巴比塔，而人类用同一种语言建造了精神的巴比塔，那就是数学。它是艺术，也是生活;是态度,也是信仰;是最复杂的简单，也是最单纯的完美。

数学是生活。当然，我们的意思不是说生活离不开算术，技术离不开微积分；而是说数学本身也能成为大众的生活态度和生活方式。很多人感觉数学枯燥无味，是因为他把数学从生活中赶走了。当你发现一个小公式也像一首小诗那么多情的时候，还忍心把它忘记吗？大家能享受“诗意的生活”，从这点说，数学是一样的。

数学的生活很简单。如今流行着很多深藏“大道理”的小故事，那些道理多半取决于讲道理的人的态度和立场。它们是多变的，因为多变而被随意扭曲，因为扭曲而成为多样选择的理由。在所谓“后现代”的今天，似乎一切东西都成为多样的，人们像浮萍一样漂荡在多样选择的迷雾里，起码的追求也失落在“和谐”的“中庸”里。数学能告诉我们，多样的背后存在统一，极端才是和谐的源泉和基础。从某种意义说，数学的精神就是追求极端，它永远选择最简的、最美的，当然也是最好的。数学决没有圆滑的道理，也不为模糊的借口留下一点儿空间。

数学生活也浪漫。很多人怕数学抽象，却喜欢抽象的绘画和怪诞的文学。可见抽象不是数学的罪过。艺术家的想象力令人羡慕，而数学家的想象力更多。希尔伯特说过，如果哪个数学家一旦改行做了小说家（真的有），我们不要惊奇——因为那人缺乏足够的想象力做数学家，却足够做一个小说家。懂一点儿数学的

伏尔泰也感觉，阿基米德头脑的想象力比荷马的多。我们认为艺术家最有想象力，那是因为我们自己太缺乏想象力。

数学是明澈的思维。生活里的许多巧合——那些常被有心或无心地异化为玄妙或骗术法宝的巧合，也许只是自然而简单的数学结果。以数学的眼光来看生活，不会有那么多的模糊。有数学精神的人多了，骗子（特别是那些穿戴科学衣冠的骗子）的空间就小了。无限的虚幻能在数学找到最踏实的归宿，它们“如龙涎香和麝香，如安息香和乳香，对精神和感观的激动都一一颂扬。”（波德莱尔《恶之花·感应》）

数学是奇异的旅行。数学在某个属于它们自身的永恒而朦胧的地方，在那片朦胧的土地上，我们已经看到了三角形的三个内角和等于180度，三条中线总是交于一点而且三分每一条中线；在那片朦胧的土地上，还存在着无数更令人惊奇的几何图形和数字的奇妙，等着我们去和它们相遇。

数学是纯美的艺术。数学家像画家和诗人，都创造“模式”，不过是用思想来创造，用符号来表达。数学的思想，就像画家的色彩和诗人的文字，以和谐的方式组织起来。数学的世界里没有丑陋的位置。在数学家的眼里，自己笔下的公式和符号就像希腊神话里的那位塞浦路斯国王，从自己的雕像看到了爱人的生命。在数学里，在那比石头还坚硬的逻辑里，真的藏着数学家们的美的追求，藏着他们的性情和生命。

数学是精神的自由。惟独在数学中，人们可以通过完全自由的思想达到自我的满足。不论王摩诘的“雪地芭蕉”还是皮格马利翁（Pygmalion）的加拉提亚（Galatea），都能在数学中找到。数学没有任何外在的约束，约束数学的还是数学。

数学是永不停歇的人生。学数学的感觉就像在爬山，为了寻找新的山峰不停地去攀爬。当我们对寻找新的山峰不再感兴趣，生命也就结束了。

不论你是不是知道一点儿（或很多）数学，都可以走进数学圈，孔夫子说了，“知之者不如好之者，好之者不如乐之者。”

只要“君子乐之”，就走进了一种高远的境界。王国维先生讲人生境界，是从“望极天涯”到“蓦然回首”，换一种眼光看，就是从无穷回到眼前，从无限回归有限。而真正圆满了这个过程的，就是数学。来数学圈走走，我们也许能唤回正在失去的灵魂，找回一个圆满的人生。

1939 年 12 月，怀特海在哈佛大学演讲《数学与善》中说，“因为有无限的主题和内容，数学甚至现代数学，也还是处在婴儿时期的学问。如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思想的新特点就是数学理解占统治地位。”这个想法也许浪漫，但他期许的年代似乎太过久远——他自己曾估计，一个新的思想模式渗透进一个文化的核心，需要 1 000 年——我们的希望是，这个过程会快一点儿，更快一点儿。

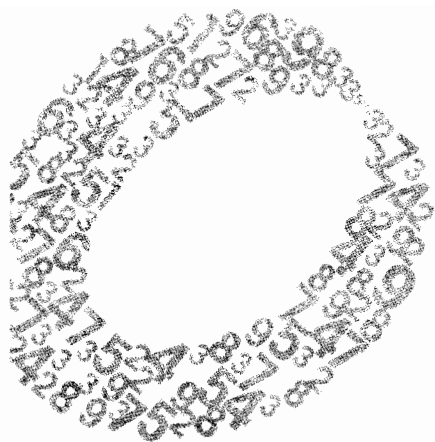
最后，我们借从数学家成为最有想象力的作家的卡洛尔笔下的爱丽思和那只著名的“柴郡猫”的一段充满数学趣味的对话，来总结我们的数学圈旅行：

“你能告诉我，我从这儿该走哪条路吗?”
“那多半儿要看你想去哪儿。”猫说。
“我不在乎去哪儿——”爱丽思说。
“那么你走哪条路都没关系，”猫说。
“——只要能到个地方就行，”爱丽思解释。
“噢，当然，你总能到个地方的，”猫说，“只要你走得够远。”

我们的数学圈没有起点，也没有终点，不论怎么走，只要走得够远，你总能到某个地方的。

李泳

2006 年 8 月



中译本序

现在流行一句话，世界是平的。这原是物理概念，也是数学结论。借这句卖出去的话来说，数学是圆的，能把什么都圈进来了，而不单是问题、定理和公式。这也是本书不同于其他“方”数学读物的地方。

《数学圈》是一系列轻松愉快的精神旅行，包括《走进数学圈》（原分上下卷）、《重游数学圈》、《相约数学圈》、《告别数学圈》和《回归数学圈》，原由 Prindle, Weber & Schmidt 在 1969 到 1987 年间陆续出版，前些年美国数学会将其合为三册，即我们现在看到的版本。编者伊弗斯（Howard Eves）是了不起的数学导师，“不论给中学生、大学生讲还是给数学老师讲，他总能令听众着迷。”同事们听了他的课，赞叹为“最迷人的演讲”。伊弗斯 1934 年在弗吉尼亚大学获学士学位，第二年为哈佛硕士，然后在普林斯顿大学继续学习，1948 年获俄勒冈州立大学数学博士学位。在普林斯顿，他认识了爱因斯坦，经常一起散步，从学校回家。路上有家杂货店，店里有冰激凌。有一次，爱因斯坦说那锥形的玩意儿挺好看，伊弗斯就给他买了一个。从此，他们每次经过都会买冰激凌。有一天，走到店门口时，爱因斯坦眼睛一亮，大声说，“看啦，今天我也带钱了！”当他把硬币放在柜台上时，伊弗斯赶紧拿出自

己的钱把它换了回来——那枚爱因斯坦硬币成为他后来的数学博物馆的第一件藏品。这个发生在作者身上的故事（据他在缅因州立大学的同事 Clayton Dodge 的回忆），表现了数学家的好奇、天真和快乐，这些品格时时流露在许多数学家的故事里，也代表着数学圈的精神。

20 世纪 40 年代以来，伊弗斯相继在纽约锡拉丘兹大学、普吉特湾大学和俄勒冈州立大学任教，1954 年到新成立的缅因州立大学，直到 1976 年退休。退休以后，他“像从美国最东的顶点滚下的石头”，从缅因州立大学的 Machias 和 Lubec 分校直到东南角的中佛罗里达大学。他一生写过 30 本书，200 多篇论文。两卷《几何考察》是他的权威著作，而两卷《数学的伟大时刻》是他关于数学历史的 43 个精彩演讲。我们把伊弗斯的履历写出来，是因为书中的许多故事就发生在他工作过的地方。同时也是为了纪念这位可敬的数学老师。其实他距离我们很近——三年前的今天，2004 年 6 月 6 日，93 岁的老人家才离开我们。

“圈”在这里的近 2000 个数学和数学家的故事，像出没在数学星空不同时空区域的星星，但我们很容易从它们组合出几个大的星座：数学史的、数学人的、数学娱乐的，还有数学幽默的。任何读者当然都能从这个星空发现乐趣，而在过去的几十年里，它还发挥了一样更特殊也许更重要的功能——正如出版者在前言里说的，“成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。”我们相信，这些星星同样能点缀我们的中小学数学课堂，让同学通过它们来经历数学的惊奇，感觉数学的魔力。

数学的第一个魔力是吸引我们的好奇心。很多历史人物（不单数学家）小时候都为欧几里得几何感到惊奇，他们惊奇什么？今天我们在几何课上还有多少惊奇？同样惊奇的还有那个大家都习惯了的“第五公设”——现代数学和物理学，至少有一半是从对它的好奇开始的。如果没有那一点好奇，今天我们大概

也不能说“世界是平的”。因为原始的好奇，欧几里得几何把生活和观察理性化了；因为思想的好奇，非欧几何从人类的纯粹理性中产生了；而它们与物理世界的“前定和谐”，似乎就是爱因斯坦说的世界上“最难理解的”事情，也是我们永远的好奇的源泉。

数学的第二个魔力来自一只看不见的手。想一个最简单的问题：一个物体在重力作用下从空间一点到另一点（两点不在同一垂线），沿什么样的路径最节省时间？这是300年前的一个数学挑战，好奇的同学可以慢慢思考。从某种意义说，数学就是通过这个习题，伸出了它那只魔力的手，指引着万物运行的轨迹，也引出了一个绝妙的自然法则。大多数人并不需要学会如何挥动那只手，但如果知道有那样一只手，我们就能以更透明的眼光来看世界和自然，看到复杂的简单的和谐。

数学的第三个魔力在于它的人情味。孟夫子早就说过，“颂其诗，读其书，不知其人，可乎?”数学也不例外，也是“可以兴，可以观，可以群，可以怨”的，我们为什么不也怀着读诗的心情去认识它背后的人呢？每个人大概都能说出很多数学家的名字，不过那通常只是定理或公式的标签，并不能唤起对一个个有血肉的人物的联想。我们在这儿能遇见形形色色的古今人物，可爱的，可恨的，可乐的，可笑的，可悲的，可怜的，可敬的，可耻的……但“真正的数学家”（哈代的意思）似乎都很简单，有些还是被生活嘲弄的对象。其实他们本来也未必比别人聪明，只是靠了更多的无知换来那“一点”特别的聪明。我们可以看到，数学人比其他科学圈子里的人更像老子所谓的“建德若偷，质真若渝，大白若辱，大方无隅”。从这一点说，数学也是一门自我修养的工夫。一支笔，一张纸，“回也不改其乐”。有人问大数学家庞加莱如何才能像数学家一样思考，他回答说，“找一条倾斜的沙土小路，走上去，走下来，然后反复走上走下。数学思想就在脚底的摩擦中产生出来了。”简单地说，经常在自己的头脑里想想数学，则“鄙吝之心不复生矣!”

100年前，法国《数学教育》杂志对数学家进行过一次问卷调查，第一个问题是“你什么时候开始对数学发生兴趣?”60%的回答在11岁到18岁之间。就是说，数学不一定要从很小的时候起步，很多数学家是从中学时代开始对数学发生兴趣的。如果我们今天的课堂能多一点兴趣，多一点人情味，也许能少扼杀几个未来的数学家吧?

最后说说译本。

原书是相隔20年的产物，故事来源（作者）众多，有时出现不同说法，与流行说法也不尽相同，正好互为补充。很多人物多次出现，背景介绍时有重复，译本也保留了；对不那么出名的数学家，我们多次在译名后保留了原文。很多不大流行的名词(地名、杂志、图书等)零星出现在不同的地方，译本也不厌重复地留下原文，以方便感兴趣的读者利用网络和工具书检索相关信息。

原书引用了许多文学作品片断，译者未能全部找原著来对照，因此片断的译文不一定符合原来作品的环境。好在作者的意图是从中看到一点数学趣味，这一点尽量保留了。

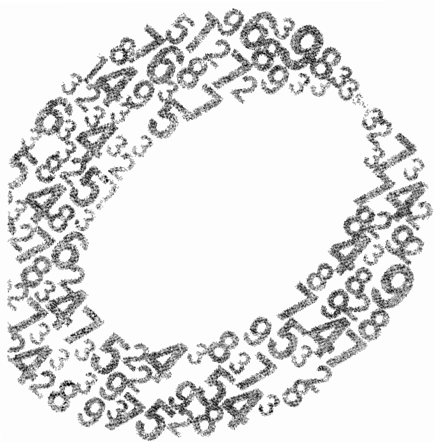
原书有不少带着数学家机敏的文字游戏（如打油诗、笑话、双关语等），有的完全是靠英文读音来表现的，如果译成中文，不但失去了原来的趣味和精神，中文也毫无意义。因此保留了原文，略加注释说明。它们是西方数学娱乐文化的一部分，也正好是课堂数学游戏的题目。

原书提及很多文化和教育背景，译本补充了一些注释和图片(原有的图片有编号，增加的图片没有编号)。图片主要来自一些名画和老照片，多数来源已无从考察。借作者在前言的话说，如果谁发现我们可能“偷”了他的作品，请求他原谅。

原书出现了一些德文、法文和西班牙文的句子，译者感谢张卜天、刘胜利、萧耐园、徐纪贵等先生的译文。

译者

2007年6月6日

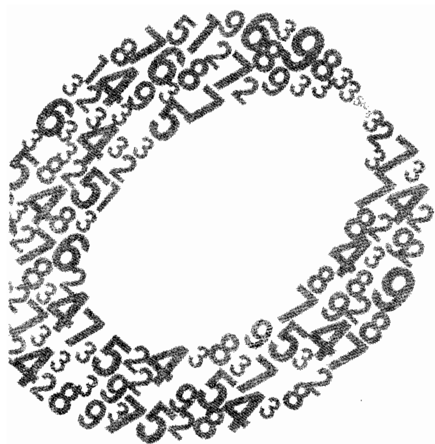


出版者的话

多年来，著名数学史家和数学导师霍华德·伊弗斯(Howard Eves)收集了大量数学和数学家的奇闻轶事，将它们汇编为六卷《数学圈》。成千上万的数学老师都从这些轶事中发现了乐趣，还将它们用于教学，给课堂增添情趣，让数学多一点儿人文色彩，激发学生的灵感，追寻文化历史的线索。通过与伊弗斯教授特别商量，美国数学会(MAA)很高兴将六卷《数学圈》重新出版发行。

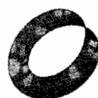
《走进数学圈》是最早的一卷，1969年出版，赢得了一片喝彩。现在作为这个三卷本的第一卷。《重游数学圈》和《相约数学圈》合为第二卷,《告别数学圈》和《回归数学圈》合为第三卷。

这个三卷本《数学圈》全集一定能让你们快乐起来，所有的数学爱好者们，特别是那些欣赏数学人文和文化的人们。

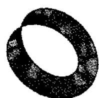


目 录

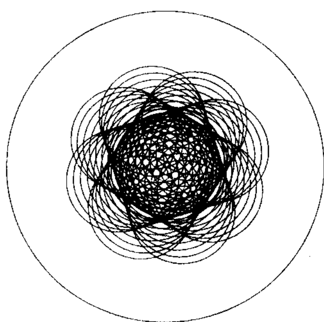
重游数学圈

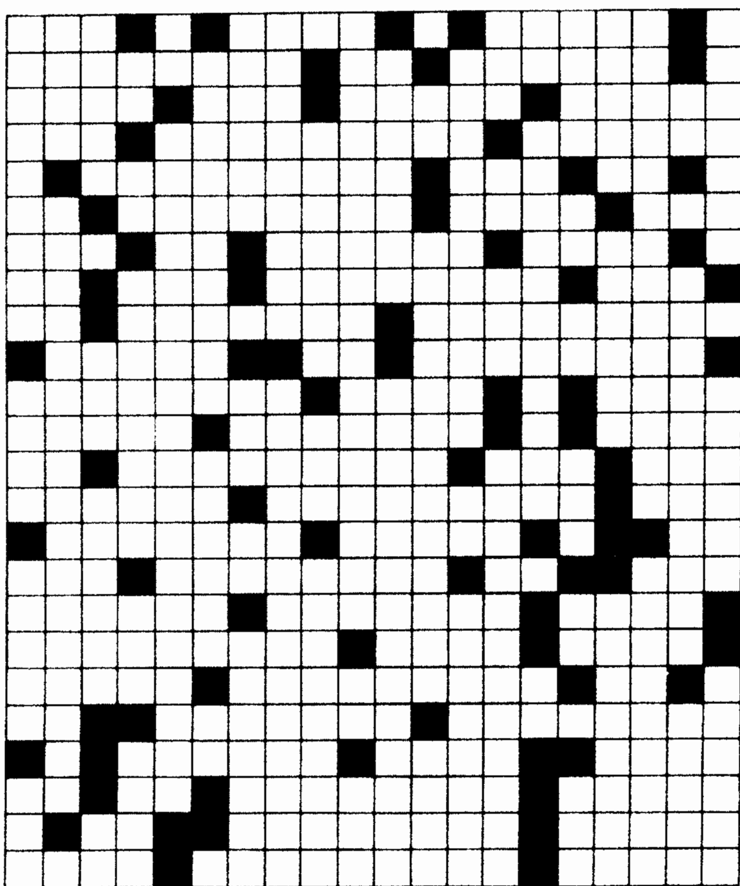


相约数学圈

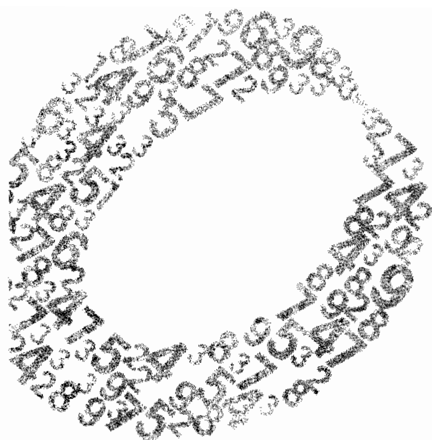


重游数学圈





根据π设计的随机数的墙面瓷砖花纹。具体描述见R144。



前 言

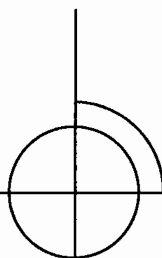
那么多的人喜欢我的小书《走进数学圈》，那么多的人要我继续我的旅行，都令我感动，因此我在这儿给大家奉献360个新的数学故事。这一卷以主题分类，不同于第一卷以时间为序。在这个集子里，我胆子大了（只是大一点儿），讲了还健在的数学家的故事。我收集的材料中有很多这种类型的故事，但我不会为了迎合大家的需要而践踏任何人的感觉；但涉及的人物那么多，我也不可能去征得每个人的许可。所以，这儿只出现了几个关于我的同事的故事，我能保证他们都有良好的品格。他们都是我尊重的人，他们的每一件事情都是我满怀着深情写出来的。

这一卷还有意识地混合了不同的风味：轻松的和严肃的，哲理的和无聊的，轻率的和认真的，旧的和新的，浅显的和深奥的。有人喜欢双关语，有人讨厌它；有人喜欢有趣的错误，有人说它无聊；有人喜欢课堂幽默，有人觉得讨厌；有人欣赏哲理格言，有人感到厌倦；有人爱听心酸的故事，有人会为它难过……真正的问题在于，所有类型的故事都能在课堂找到它们的空间；而对某种类型的故事怀有怨恨的读者就需要忍耐一下了。作为一个专门领域

的丰富多彩的故事传说的组成部分，所有类型也许都应该保留下来。我真诚地感谢给我提供故事的同事和通信者们，他们说愿意在这样一本书里看到那样的故事。为了表达我的谢意，我把每个贡献者的名字都写在相应故事的后面。我还要特别感谢韦恩(Alan Wayne)，他孜孜不倦地收集点滴的数学幽默；感谢波利亚(George Polya)，他是我们领域的故事大师。关于数和数字的许多故事都改编自曼宁格（Karl Menninger）的那本卓越而博学的著作，《数字与数字符号：数的历史》（MIT 出版社，1969)。许多布尔巴基的故事来自哈尔莫斯（Paul R. Halmos）在《科学美国人》上的妙趣横生的讲述。另外，我要再次感谢《数学教师》杂志允许我改编发表在它的“历史记述”专栏（我为它做过多年编辑）的一些故事。同样感谢《美国数学月刊》允许我引用两篇文章的部分内容。我个人的几个故事都是基于我和这个杰出的大学刊物的悠久渊源。最后，和《走进数学圈》一样，历史注记和摘要主要是根据我的《数学史引论》（Holt, Rinehart and Winston, third edition, 1969）改编的，感兴趣的读者可以从那本书里找到更完整的历史记述。当然，还有很多需要感谢的人。大约 2000 个数学故事的收集，是一个逐渐积累的（主要是精神的）过程，经过了很多年的时间。随着时间的流逝，大多数故事已经失去了来源。如果谁发现我可能“偷”了他的故事，我请求原谅。

本书的手稿是我在帮助戈尔翰学院（新近成立的缅因州立大学的一部分）的那一年中陆续写出来的。我当然要深切感谢学院领导和数学系员工，是他们使我的访问愉快而富有成效。我将永远铭记这次访问留下的美好印象。

霍华德·伊弗斯



第一象限

从有理数到度量系统

数与数字

我们最早与数学遭遇——在我们还是黄毛小儿的时候——关心的就是数和数字。这样看来，我们应该先讲一些关于数和数字的故事。光这些故事就能写满一本，我们只能选出两打来讲。

1° 阿拉伯数字的起源

摩洛哥博物馆馆长鲍尔基芭女士（Abdelkri Boujibar）最近提出一条有趣而合乎逻辑的路线，说某个阿拉伯数学家1000多年前就是那样发明从0到9的数字的。如图1，他构造的数字，正好使每个数字包含相应数目的角。于是，“1”包含一个角，“2”包含两个角，“3”包含三个角，等等。“0”当然没有角。



图1

可能有人以为我们的数字真是那样根据某种理由创造出来的，只是具体的过程已随岁月模糊了。数字1，2，3大概是潦草书写1画、2画和3画的结果（后两个字是横画）。不过，其他数字的可能起源却令人困惑。10（或11）世纪的阿拉伯天文学家拉格尔（Aben Ragel）设想了一种方式，可惜没有历史根据（图2（a））；18世纪莱比锡机械师列欧波德（Jacob Leupold）声称他那时广泛流行着图2（b）所示意的说法。初学者渴望发现能解开那些未解之谜的钥匙，这些想象的解释也就应运而生了。

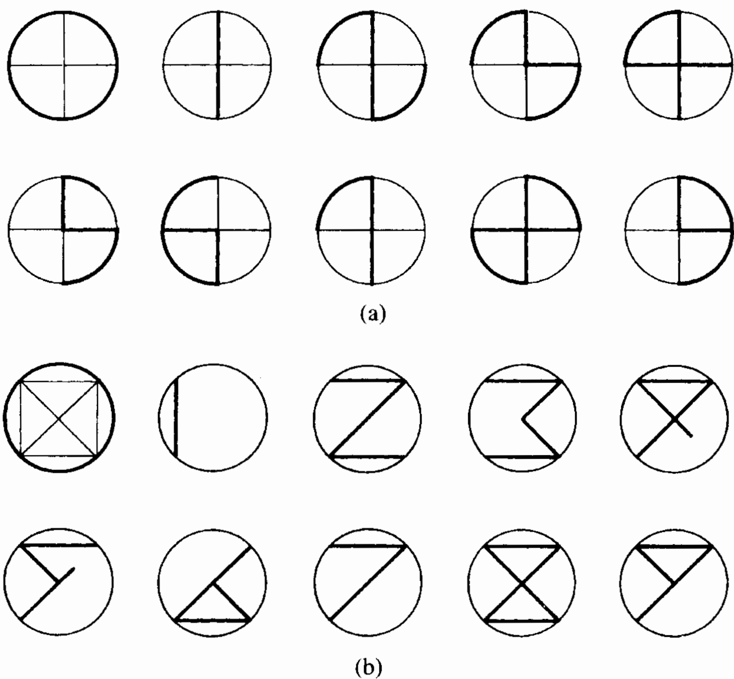


图 2

2° 中文数字

有着两千多年历史的中文数字体系非常有趣。根本说来，这是一个以 10 为基的数字体系。图 3（a）说明了数字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 出现在奇数位（个位、百位等）的样子。如果出现在偶数位（十位、千位等），则如图 3（b）。北宋（960 ~ 1126）以来，人们开始用圆圈○来代表零。图 3（c）代表这个数系下的 1971。[1] 中文的“算”字是如图 3（d）的象形文字，它代表中国人用以计算的小木棍。[2]

1 《孙子算经》有口诀：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵。千十相望，万百相当。”后来的《夏侯阳算经》又补充说，“满六以上，五在上方。六不积算，五不单张。”

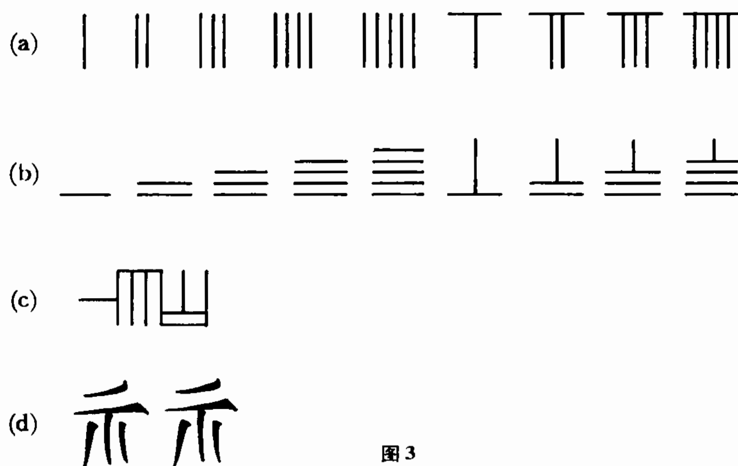


图 3

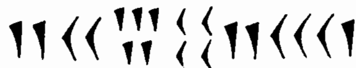
3° 巴比伦的“零”

流传至今的最古老的位置数字体系是古巴比伦人公元前3000到公元前2000年间应用的。这是一个60进制（即以60为基）的数系，小于60的数字则用10进制的数来表示。例如，“1”和“10”的符号分别为 和 。于是，25就写成

$$25 = 2(10) + 5 =$$

而524 551则是

$$524551 = 2(60^3) + 25(60^2) + 42(60) + 31 =$$



公元前300年后，这种位置数系暴露了一大缺陷：它没有符号来代表那些缺失的60的幂，因此一个数的表达可能引起误会。最后，代表缺失的符号由两个倾斜的小楔形笔画组成。但这个符

2 根据《说文》，“蒜”是“会意字”而不是象形字：“蒜，明视以算之，从二示。”段（玉裁）注：“示与视、算与蒜皆叠韵也。明视故从二示。”不过这种说法也许错了。实际上，“蒜”的古文更像两个并列的“八”字（即图3a的第八个符号），引申为算。说到底，还是会意字。



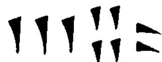
号仅用来表示数字中间缺失的以 60 为基的幂，而不代表数字末端的缺失项。这样说来，它只是“部分的”零，因为真正的零，如 304 和 340 中的零，既能代表数字中间的缺失，也能代表数字末尾的缺失。于是，在巴比伦人的符号里，10 804 表示为

$$10804 = 3(60^2) + 0(60) + 4 =$$

11 040 则应表示为

$$11040 = 3(60^2) + 4(60) =$$

而不是



4° 巴布亚人的身体数字

“身体数字”就是拿人体的某个部位（如头、眼、耳、手臂等）来代表一定的数字。某些原始人还在用这样的记数方式。例如，新几内亚东南部的一个巴布亚人部落就是这样数数的：

1 右小指　　12 鼻子
2 右无名指　　13 嘴
3 右中指　　14 左耳
4 右食指　　15 左肩
5 右拇指　　16 左肘
6 右腕　　17 左腕
7 右肘　　18 左拇指
8 右肩　　19 左食指
9 右耳　　20 左中指

10 右眼 21 左无名指

11 左眼 22 左小指

我们看到，除了中间代表“12”和“13”的“鼻”和“嘴”，其余数字是左右“镜像对称”的。

5° 巴布亚《圣经》里的一段奇文

巴布亚人还有一种奇异的记数方式，根据那种方式，《圣经》里的一段文字（《约翰福音》5：5）：“那儿有一个人，病了三十八年”，就应该翻译成“一个人卧病一个人（20）、两肋（10）、5年又3年”。

6° 三即是多

有些原始部落没有几个数字，他们的词汇里只有“1，2，多”。因为先民的这种“三即是多”的观念，后来常将“三”与多联系在一起。例如，在巴比伦，单数名词后加代表“三”的数字 *es*，就成了相应的复数名词。[3]

3 参见《走进数学圈》（I11）。

不过，最能铭刻“三即是多”观念的还是埃及的图画文字和中国的象形文字。古埃及有这样的石刻文字：“成千的人为王牺牲，成百的人敬献在王前。”在图画文字（或符号）里，“成千”是把“一千”的符号并列画三遍，而“成百”是把“一百”的符号并列画三遍。图4展示了另外几个埃及的图形文字，都是重复三遍代表多的意思。（a）“水”是三（多）层波浪；（b）“毛”是三根毛发；（c）“洪水”来自三个水壶的天空；（d）“众多植物”由三棵苗来代表；（e）“哭泣”是含三滴泪的眼睛。在埃及图画文字里，复数形式的名词通常是单数名词后面

紧跟三根垂直的线条。

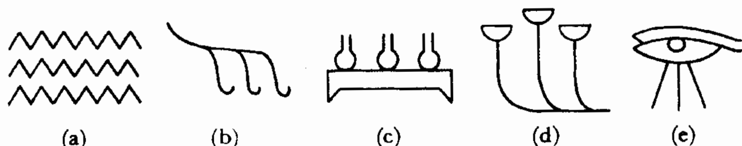


图 4

4 很遗憾，西方人把汉字扭曲成这副模样。三“言”读若“沓”，“疾言也”（《说文》）；而“姦”似乎没有长舌的意思。

图 5 是 5 个汉字，都以重复三次来代表多。（a）三“木”代表森林；（b）三“毛”代表“毛皮”；（c）三“人”为“众”；（d）三“言”意味着没完没了的唠叨；（e）三“女”代表“长舌妇”。[4]

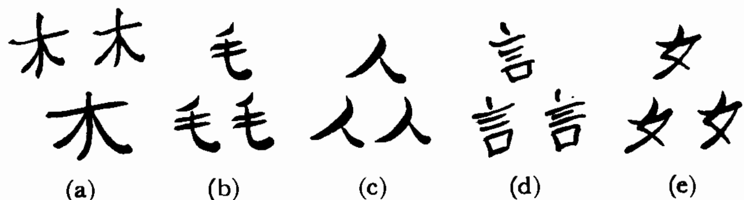


图 5

5 图 4 的图形文字和图 5 的象形文字都见于 Karl Menninger, *Number Words and Symbols, a Cultural History of Numbers*。（原注）

门宁格尔（Karl Menninger）告诉我们，[5]一个老马六甲人在别人问他年龄时回答说，“先生，我三岁了。”

我们在第一卷也讲过相关的故事。

7° “中指天”

尽管原始人拿手指数数，但他们很少拿不同手指的名称来当数字。一个例外是南美洲的卡马尤拉（Kamayura）部落，他们用“中指”当数字“三”。于是，“三天”被说成“中指天”。

8° 数的手势

不光原始人，即使现代文明人，都常在数数时打手势。例如，在某些部落，人们数“十”的时候，会用一个手掌拍打另

一个手掌；而数“六”的时候，会用一只手很快滑过另一只手。门宁格尔告诉我们，可以通过手势来区分一些非洲部落：看他们数数是从左手开始还是从右手开始，看他们的手指是伸开的还是卷曲的，看他们的手掌是朝内还是朝外。

英国人马松（R. Mason）讲过一个有趣的故事。第二次世界大战时，一个日本女孩儿在印度，而印度正同日本交战。为了避免可能的麻烦，女孩儿的朋友把她当中国人介绍给当地的一个英国人。英国人有点儿怀疑，就让女孩儿用手指数到五。女孩儿犹豫片刻，还是做了。接下来，

> 赫莱（Headley）先生朗声大笑，“看哪！你看到了吗？你看清她怎么数了吗？把手张开，然后曲着手指头一个个地数。你见过有中国人这样做吗？没有！中国人数数和英国人一样，先是握着拳头的。她是日本人！”他得意地嚷着。

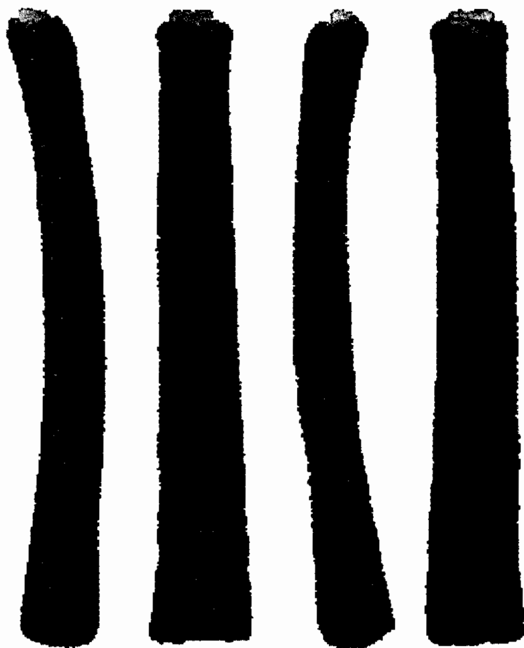
9° 最早的数学器具

长期以来，现存最早的有一定数学意义的器具，是大约公元前3100年埃及王室的一根权杖，存放在牛津的一家博物馆里。权杖上用埃及图形文字刻着几个百万、十万的数字，夸张地记录着一场战役的成果。

现在，我们有了更悠远的器具，也跟记数有关。那是一根骨质的手杖，刻着代表数字的槽痕，头上还嵌着一颗石英。这是著名的伊香果（Ishango）骨，是海因泽林（Jean de Heinzelin）几年前（1960年）在刚果民主共和国爱得华湖畔发现的，时间可以回溯到公元前9000到公元前6500年。[6]

于是，地球上最早的数学也许不是来自埃及人和美索布达米

6 骨头现存布鲁塞尔自然历史博物馆，年代已经回溯到公元前23 000到公元前18 000年。其中一块上的数字是11，13，17，19，都是素数。



Ishango 骨（Eric W. Weisstein. "Ishango Bone." From *MathWorld*—A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/IshangoBone.html）

亚人，而来自那些生活在撒哈拉沙漠南部的非洲黑人。

10° "腹中婴儿"

有趣的是，在西非的曼丁哥人部落，kononto 代表"9"。它本来的意思是"腹中婴儿"——在9个月大的时候。

11° 数字禁忌

[下面的文字引自扎斯拉夫斯基（Claudia Zaslavsky）的"黑人非洲的传统数学"，发表在《数学教师》"历史记述"专栏，1970年4月，pp. 343 ~ 356。]

在某些非洲部落，还有一个有趣的现象：把七、八、九综合起来说。例如，在苏丹西部的曼德雅克斯（Mandyakos），人们说7=6+1，9=8+1；而在象牙海岸，人们说7=6+1，8=6+2。这种现象可能是因为人们忌讳说某些数字。在刚果和莫西人看来，“七”是特别不吉利的数。

我发现最奇异的“复合数”的例子，出现在班图语（葡萄牙殖民地的安哥拉人讲的一种语言）中。“七”字的本义竟然是“六－二”！我有幸和传教士亨德森（Lawrence Henderson）先生讨论过这件事情，他曾在安哥拉住过多年。他告诉我，一个说班图语的土人告诉他——而那土人又是听一个与人类学家没有一点儿瓜葛的老人说的——原先的“七”字因为禁忌而被“八”字取代了。

禁忌也可以通过其他方式来回避。例如，说话人只打手势，让听话人把那字说出来。这样，危险就由两个人来分担了。

许多非洲人相信，数人、家畜或贵重物品是不吉利的，害怕灾难会降临在他们头上。在利比里亚的格贝列人中，很多算术是借助石堆来做的，人们也就习惯了以这种方式来记数。实际上，有人做过实验，让没读过书的格贝列人来估计一堆石头的数量，他们的成绩远远超过了耶鲁大学的学生。他们还善于估量容器里的大米；估量大米原是他们生活的一部分。然而，格贝列人却弄不清楚他们村里有多少人和房子。实验者们理直气壮地说那些部落人害怕数生物，却显然没有意识到，恐惧的根源可能正在于他们不能正确回答自己村里有多少人和房子。

这样的数字禁忌并非只出现在非洲。《旧约》也有类似格贝列人的那种数人禁忌。古希伯来人忌讳写十五和十六。希伯来人的数字符号有点儿像希腊人的：用字母来代表数。希腊人也用十进制，所以“十五”表示为代表“十”的 *yod* 后跟代表“五”

的 *heh*。然而，这个复合的数字（另外还有“十加六”）读起来却像 Jehovah（耶和华）的名讳。于是，人们在书写希伯来语时，用 $9+6$ 来取代 $10+5$，用 $9+7$ 来取代 $10+6$。后面的数字，则还是加 10。

可在美国，又有多少大楼跳过了“13”层呢？

12° 我们的混合文化

我们的语言是日尔曼的，我们的书写是罗马的，而我们的数字是印度的！

13° 第 11 诫

“你不能拿零来除。”

14° 最佳近似

昔有老人，语义深长：
“二加二如何，你把我教？
我搜索枯肠，
才得四方——
恐怕太少，令我忧伤。”

15° 无价真理

在大溪地的普纳阿乌伊亚（Punaauia）学校大门的标志上刻着一个方程：$2+2=4$。[7]

7 这个“大溪地”（Tahiti）就是大画家高更留下许多名画的地方。

16° 斐波纳契幽默

一架自助电梯上贴着一张字条：“第 8 层按钮坏了；请按 5

和3。”[8]

8 读者应该记得，1，1，2，3，5，8，…形成所谓的斐波那契数列（数列中的一个数等于它前两个数之和）。

17° 无处不在的数字“五”

［下面的文字引自巴纳特教授（I. A. Barnett）的同题文章，发表在《数学教师》“历史记述”专栏，1968年4月，pp. 433 ~ 435。］

有趣的是，我们发现数字“5”竟然那么频繁地出现在数学的不同场合。下面是一些例子，当然你还能找到更多的。

1）5点惟一决定一条圆锥曲线；

2）只有5种正多面体；

3）5阶和低于5阶的交代群都是单群；

4）5阶和高于5阶的一般代数方程不可能通过开方来求解；

5）所有5阶或低于5阶的群都是可交换的；

6）拉梅（Lamé）定理：欲求两个数的最大公因子的因子数不大于其中小数的位数的5倍；[9]

9 参见《走进数学圈》（114）。

7）只有5个欧几里得二次域，即域 $a+b\sqrt{m}$，这里，$m=-1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11$。（欧几里得域是具有欧几里得算法的域。）

8）只有5个已知费马素数，即形如 $2^{2^t}+1$ 的素数（$t=0,1,2,3,4$，分别得到素数3，5，17，257，65537）。

9）5色定理：最多用5种不同的颜色就能恰当地为球面的每幅地图着色。（所谓恰当着色，指具有公共边界的两个区域没有相同的颜色。人们猜想，只要四种颜色就够了。）

10）曲线

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1$$

（其中 a，b，c，d 为整数）最多只能通过5个格点。

11）每个正整数都能表示为 5 个不同正（或负）整数的立方和。（猜想 4 个数就够了。）

12）欧拉猜想，对 $n>1$，至少 n 个不同正整数的 n 次方和才能得到一个 n 次方的数。欧拉猜想可能是错误的，n 的最小数值是 5。

（最近人们发现

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$$

我们知道，至少 4 个不同的正 5 次方数能得到一个正 5 次方数，上面是最小的一个例子。）[10]

10 欧拉猜想还有更好的叙述方式："$a_1^n+a_2^n+a_3^n+\cdots+a_{n-1}^n=a_n^n$ 没有正整数解。"这显然是从"费马大定理"引出来的。1966 年，L. J. Lander 和 T. R. Parkin 用文中的那个例子把它推翻了。

18° 新毕达哥拉斯主义?

研究非欧几何时，人们在它历史初期的许多著名事件中，会很快注意到那些年代都有着重复的数字。下面我们列举非欧几何历史上的一些重大年代，从欧洲出版普罗克洛斯（Proclus）《欧几里得评注》第一卷开始，正是普罗克洛斯的这部著作的出版，才激发了欧洲人对欧几里得平行公设的兴趣。

普罗克洛斯《欧几里得评注》第一卷，1533 年在欧洲出版；

瓦利斯（J. Wallis，1616 ~ 1703）1663 年，瓦利斯相信他已经"证明"了平行公设；

萨卡里（G. Saccheri，1667 ~ 1733）1733 年，萨卡里关于平行公设的著作出版；

兰伯特（J. H. Lambert，1728 ~ 1777）1766 年，兰伯特介绍了他尚未完成的关于平行公设的研究，距萨卡里的著作正好 33 年；1788 年，兰伯特的朋友们将他的著作拿去出版，距离他去世正好 11 年。

勒让得（A. M. Legendre，1752 ~ 1833）

高斯（C. F. Gauss，1777 ~ 1855）

博莱（J. Bolyai，1802 ~ 1860）1823，1829，1832，是博莱研究平行公设的几个重要年代。

罗巴切夫斯基（N. I. Lobachevsky，1793 ~ 1856）1829 ~ 1830，1840，是罗巴切夫斯基研究平行公设的几个重要年代。

在博莱和罗巴切夫斯基之前，那些年代都有重复的数字；到了博莱，重复的数字就不再出现了。其中一定隐藏着毕达哥拉斯式的意义。事情可能是这样的：在博莱之前，研究者们觉得平行公设可以通过欧几里得的其他公设推导出来，而公设的任何否定都必然蕴含着矛盾。至少，在博莱之前，除了高斯而外，大家都是这样想的。不过，尽管高斯不相信欧几里得平行公设的否定会带来任何矛盾，他还是没有勇气公开说出来。博莱和罗巴切夫斯基的出现，打破了重复数字的魔咒，因为他们两个从来不曾犹豫，在历史上第一次公开表示他们相信平行公设独立于欧几里得的其他公设，因此不可能从它们推导出来。

19° 数的神秘主义

佩尔斯（Charles Sanders Peirce，1839 ~ 1914），哈佛著名数学家本杰明（Benjamin Peirce）的儿子，本人也是萌芽时期的符号逻辑领域的功臣。他从一本诗人传记词典里找出前五位来，列出他们的名字和死亡时的年龄：

Aagard，48 岁

Abeille，76 岁

Abulola，84 岁

Abunowas，48 岁



Accords，45 岁

他从这 5 个年龄，发现了下面的特征：

1）每个年龄的数字之差除以 3 的余数为 1；

2）拿每个年龄的第二个数字做第一个数字的幂指数，新数除以 3 的余数为 1；

3）每个年龄的所有素数因子（把 1 也作为素数因子）之和能被 3 整除。

20° 人的荣誉

如果像毕达哥拉斯说的那样，“数主宰宇宙”，那么数不过是我们派给那君王宝座的代表，因为我们主宰着数。（贝尔）

21° 神的荣誉

1）上帝以几何化万物。（柏拉图）

2）上帝以算术算天下。（雅可比）

3）世界上最伟大的建筑师现在都要成为纯粹的数学家了。（金斯）

4）上帝创造了整数，其余都是人为的。（克罗内克）

5）大自然是用数学符号写就的一本大书。（伽利略）

22° 肯星顿刻石之谜

[下面的小故事，是麻省理工学院斯特洛伊克（D. J. Struik）博士讲的，这里的文字引自《数学教师》“历史记述”专栏，1964 年 3 月，pp. 166 ~ 168.]

我们听说，1898 年的一天，瑞典移民过来的农夫欧曼（Olof

Ohman）正在清除他在明尼苏达肯星顿附近林场的杂草，突然在树根下发现一块石头。人们很快发觉，石头上刻着奇异的符号。专家们后来认为它是卢恩字母，是1000多年前日尔曼国家使用的一种古老文字。这些文字可以解读，原来藏着一个惊人的故事：1362年，8个哥特人、22个斯堪的那维亚人从温兰德出发西行探险，路遇劫匪，死了10个人。打劫发生在他们航行了14天的一个岛上。

这是哥伦布发现美洲之前的一个重要证据：早在14世纪，在明尼苏达就有了斯堪的那维亚人！在霍兰先生（H. R. Holand，一个挪威裔的美籍作家）的大力赞助下，肯星顿刻石成了新闻的渊薮，吸引了大量作家和记者。在华盛顿史密斯松（Smithsonian）研究所展出一年（1948～1949）之后，它得到了半官方的认同。1951年，它的巨大复制品树立在明尼苏达亚历山大附近的“卢恩石纪念公园”。许多专家和爱好者都表示，他们相信这块石头真实记录了那个遥远年代的事件。

然而，一直也有好多专家和爱好者怀疑甚至根本就不相信。这些人中，就有一位斯堪的那维亚地区语言的专家瓦尔格伦（Eric Wahlgren）教授，他还写了一本书来揭露石刻原是一场骗局。[11]因为正反两方面的争论都落在石头出土的环境和对卢恩文字的解读，数学家只能在一旁听笑话、看热闹。但也有一点能让数学家发挥专长，跻身一场有趣的论战。

11 书的标题很自信：《肯星顿石：大揭密》。（E. Wahlgren，1958. *The Kensington Stone: A Mystery Solved.*）

石刻出现了六个数字：2，8，10，14，22和1362。2和8是用我们认识的卢恩文字写的，应该没有疑问。10很奇怪，像1穿过一个圆圈，还有待文字学家来确认。而14和22，特别是1362就完全不同了。这些数不但是以十进制形式写的（绝无例外），还是以卢恩字母为数字表示的十进制位置数系的数！这样

说来，斯堪的那维亚人那时就已经在一定程度上知道了十进制的位置数系。这种数系原是通过伊斯兰国家逐渐深入到欧洲，我们在比萨的列奥纳多（Leonardo）的《算书》（*Liber Abaci*，1202）里，能看到它的许多应用。[12] 后来，它出现在几本很简单的被称做“算术”的教科书里；其中萨克罗博斯科（Johannes de Sacrobosco，大概是在巴黎大学教书的英国人）写于1250年左右的一本，广泛流传了几个世纪，也当然流传到了斯堪的那维亚。萨克罗博斯科的书，我们见过14世纪的一个冰岛译本，它和收藏在哥本哈根的一个1320年手稿《豪克抄本》（*Hauksbok*）里收录的“算术”，[13] 可能是同一个本子。然而，所有这些课本的数字都来自阿拉伯课本（有变化），而这所谓的阿拉伯或印度－阿拉伯的数字，已经很像我们今天的0，1，2，…很难想象，这个时候还会有什么地方的人当真去把老的记数方法找出来，因为那显然是大倒退，而且一定会带来诸多模糊。

for 2
for 8
for 10
for 14
for 22
for 1362

肯星顿石刻却是例外。刻石者用卢恩文字的1，2，3，4，6来刻写14，22和1362。这就像中世纪人用罗马字写14为I IV，用希腊字母写22为ββ。那个年代，人们确实用罗马或希腊文来写数字，但写法不同。22应写成κβ[14]，1362写成MCCCLXII。也有用卢恩文写数字的例子，如沃姆斯（Ole Worms）给出了从1到19的数字，但它们也都不属于位置数系的写法。

于是，我们有了不同的看法。石头可能是真的：一群倒霉的

12 比萨的列奥纳多也就是以数列出名的那位斐波那契（Leonardo Fibonacci）。书的第一章开宗明义地说，“下面是九个印度数字：9，8，7，6，5，4，3，2，1，它们连同阿拉伯所谓的‘零’，0，就能写出所有的数来。”

13 *Hauksbok* 是 Hauk Erlendsson（？－1334）抄写在羊皮纸上的古代文献汇编。

海盗流落在几千里外的荒岛，他们中间也许有人学过萨克罗博斯科或其他作者的课本，知道位置记数的方法，可惜他在困境中忘了阿拉伯符号，只好用他还依稀记得的卢恩字母来代替；当然，他大概不知道，不论卢恩的和非卢恩的、阿拉伯的和非阿拉伯的，别有一种习惯的方式来表达他那些数字，如 14 和 22。另外，石头也许是假的：那种方式的石刻数字，应该是某个斯堪的那维亚学者在 1898 年的作品，他可能得到一本卢恩文的书，但他不可能知道十进制数系的专门文献，美国的图书馆都少有那样的著作，更何况当年的明尼苏达。

14 κ 是原希腊字母表的第 11 个（现在是第 10 个，因为原第 6 个被废除了）。前 10 个字母代表 1 到 10，第 11 个字母以后分别代表 20，30，40，等等。

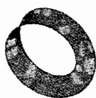
我们并不是要说，14 世纪的明尼苏达地区没有来过哥特人或挪威人。霍兰先生和他的支持者就是他们的代表。我们只是想说，拿肯星顿石头上的文字来证明 14 世纪的密西西比河流域就有了那些北欧来客，是不能令人信服的。

23° 格子算法

15 世纪和 16 世纪的算术讲述了基本的运算法则。在长乘法的众多路线中，所谓“格子法”（gelosia 或 grating）也许是最流行的。这是一种古老的方法（图 6 通过 $9876\times6789=67\ 048\ 164$ 作了说明），大概发源于印度，因为它出现在巴什迦罗（1114 ~约 1185）《丽拉沃蒂》的评注和其他印度作品中。[15]它从印度流传到中国、阿拉伯和波斯的文献。阿拉伯人长久以来最喜欢这个方法，然后把它传给西方的欧洲人。因为简单实用，这个方法一定还会继续发挥作用，可惜网格线实在不便于描画和印刷。格子像某些窗户格子，所以叫 gelosia，最后成为 *jalousie*（法语，“百叶窗”的意思）。

15 参见《走进数学圈》(95)。

注意加法在对角线进行，而且因为每个格子都那样被对角线



分割，所以部分乘法时不需要进位。

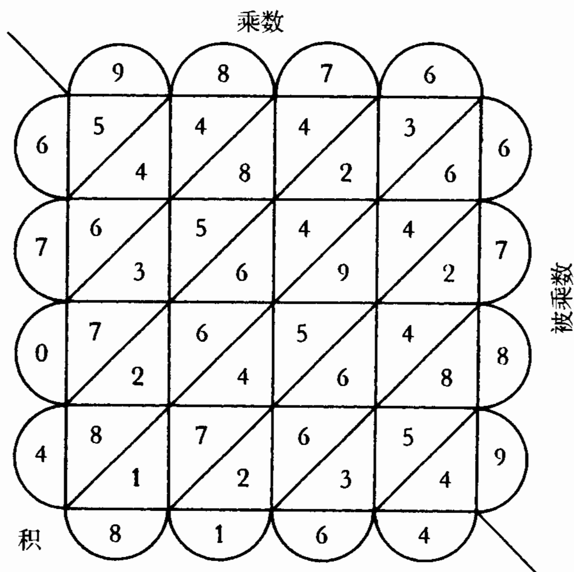


图 6

24° 船式算法

就我们今天的认识，1500 年前最流行的长除法是所谓的“船式”法（galley）或“涂抹”法，很可能源自印度。为说明这个方法，我们一步步来看 9413 除以 37 的例子。

1）将除数 37 写在被除数的下面。以通常方式得第一位商 2，写在被除数的右边；

9413 | 2
37

2）因为 $2\times3=6$，$9-6=3$，抹去 9 和 3，然后在 9 的上方写 3。因为 $2\times7=14$，$34-14=20$，抹去 7，3，4，然后在 3 的上方写 2，在 4 的上方写 0。

2
30
9413 | 2
37

3）把除数 37 以对角方式写在右下。第二步之后，被除数为 2013，得出第二位商 5。因为 $5\times3=15$，$20-15=5$，抹去 3，2，0，在 0 的上方写 5。因为 $5\times7=35$，$51-35=16$，抹去 7，3，1，在 5 的上方写 1，在 1 的上方写 6。

```
 1
25
206
9413 | 25
377
 3
```

4）再把除数 37 以对角方式写在右下。第三步之后，被除数为 163，得出第三位商 4。因为 $4\times3=12$，$16-12=4$，抹去 3，1，6，在 6 的上方写 4。因为 $4\times7=28$，$43-28=15$，抹去 7，4，3，在 4 的上方写 1，在 5 的上方写 3。

```
 11
254
2065
9413 | 254 —— 1
3777           5
 33
```

5）商为 254，余数为 15。

只要稍加练习，这个方法并不像看起来那么麻烦。它的优点在于能方便地用于沙盘，简单地以新数字取代旧的。之所以叫“船”（galley），是因为算式的外形像一只狭长的船。从页面底看算式，商像船头的斜桅；从页面左边看算式，商像矗立的桅杆。从第二个角度看时，余数常写成桅杆顶上的旗帜。

大　　数

儿童、恋人和政府，都离不开大数——儿童的夸耀，恋人的海誓山盟，政府的税收和国债，都需要大数来“度量”。

25° 梵天塔

所谓梵天塔游戏，是 Li-Sou-Stian 学院的克劳斯（M. Claus）

院长（Mandarin）在1883年告诉我们的。Claus是卢卡斯（M. Francois Edouard Anatole Lucas，1842 ~ 1891）的变形词，那时是圣路易预科学校（Lycee Saint-Louis）的教授。游戏用一块钉着三根钉子的木板。开始时，一根钉子上捋着一叠垫圈状的小钱，小钱半径不同，最大的在最底层，逐次向上递减，顶上的最小（图7）。问题是把这一叠小钱移到另一根钉子，每次只能移动一枚小钱，而且不允许大的压在小的上面；三根钉子都可以用。简单的数学知识告诉我们，假如有n枚小钱，那么至少需要2^n-1步才能完成移动。

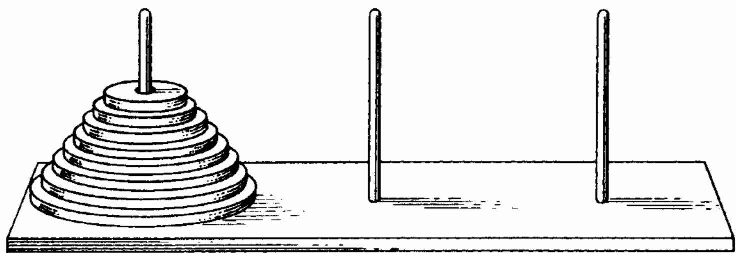


图7

游戏的发明者讲了它的来历。克劳斯在研究费马的作品时，来到瓦腊纳西大寺。大寺的穹顶下有一个标志世界中心的铜盘，铜盘上钉着三根腕尺高的钻石钉。创世纪时，上帝在其中一根钉子上放了64枚从顶到底逐渐减小的金币。这一叠金币就是梵天塔。寺里的僧侣日夜不停地把金币从一根钉子移到另一根钉子，不过梵天的戒律规定，每次只能移动一枚，而且不能把大金币放在小金币的上面。当64枚金币都从上帝原来的钉子转移到了另一根钉子，梵天塔、寺庙和僧侣，都将化归尘土，世界也将轰然消失。

假定殷勤的婆罗门僧侣每秒移动一次，夜以继日地忙碌，而

且不出一点儿错，那么梵天塔的毁灭要经过

$$2^{64}-1=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615 \text{ 秒},$$

就是说，5 840 亿年！

26° 还是 $2^{64}-1$

传说，印度舍罕王要奖赏宰相西萨·班·达依尔（Sissa Ben Dahir）发明了令人欢喜和着魔的象棋。因为游戏在64个方格的棋盘展开，达依尔就对国王说，“陛下，请在第一格里放一粒麦子，在第二格放两粒麦子，第三格放4粒，第四格放8粒，如此下去，放满棋盘的64格。”国王很惊讶：“这就是你的心愿吗?”

熟悉几何级数的中学生都很容易计算，他要 $2^{64}-1$ 粒麦子——就那些麦子，足以把整个地球表面铺满1尺厚的一层！

27° 一个人的祖先

假定每个人有两个父辈，四个祖辈，八个曾祖辈……（不允许发生乱伦），那么，自基督纪元以来——大约正好经历了64代——每人至少有 2^{64}（约184亿亿）个先人。

28° 难以置信

拿一大张厚度为千分之一英寸的纸，把它撕成两半，叠在一起。再一分为二，然后把四张叠在一起。像这样重复50次，最后那叠纸会有多高呢?

被问到这个问题时，多数人会说大约几米，也有说接近1千米的，还有壮起胆子说100千米的。实际上，那叠纸最后的高度将超过2700万千米！

29° 10^{100}和$10^{10^{100}}$

若干年前，哥伦比亚大学卡斯纳（Edward Kasner）教授对下面那些数字饶有兴趣：

1）铁的沸点是华氏 5.4×10^{3} 度；

2）原子弹爆炸中心的温度为华氏 2×10^{8} 度；

3）桥牌的牌局总数为 6.35×10^{11}；

4）自有人类以来，人们说的单词总数大约是 10^{16}；

5）自古登堡圣经问世以来，印刷文字总数超过了 10^{16}；

6）地球年龄大约为 33.5 亿年，即 10^{17} 秒；[16]

7）铀 238 的半衰期为 1.42×10^{17} 秒；

8）纽约康尼（Coney）岛沙滩的沙粒大约是 10^{20}；

9）膨胀宇宙的年龄可能不超过 2 000 万亿年，约 10^{22} 秒；[17]

10）地球质量大约为 1.2×10^{25} 磅；

11）一根普通导管里的氧原子数大约为 10^{27}；

12）根据相对论计算的宇宙直径大约为 10^{29} 厘米；

13）产生一个冰期所需要的雪花晶体数大约是 10^{30}；

14）52 张扑克牌的洗法为 8×10^{67} 种；

15）根据爱丁顿的估计，宇宙的电子总数约为 10^{79}。

卡斯纳教授发现，为方便起见，应该给 10^{100}（它远远超过了上面那些数）起一个名字。他问 9 岁的侄儿，小孩儿说“googol”，于是这个超级大数 10^{100} 就叫“googol”。后来，一个更大的数 10^{googol}，被命名为“googolplex”。

16 这是 20 世纪 70 年代的认识。虽然它现在“多了”10 亿年左右，但数量级不变。

17 这个数现在看来有点儿离谱。最近的估计大约是 150 亿年。

30° 爱丁顿数

爱丁顿爵士（Sir Arthur Eddington）根据物理学理论宣布，

宇宙间的质子数正好为

$$17 \times 2^{259}$$

也就是

15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044
717 914 527 116 709 336 231 425 076 185 631 031 276

31° 放大因子

从旧金山向伦敦打电话，呼叫者的声音的能量在传递过程中要经过逐级放大，才能传到伦敦接听者的耳朵。据说总的放大因子大约为 10^{256}。

32° 大数中的大数

真正的大数中的大数，是“史丘斯数”，“古普”(googolplex)跟它比起来，也显得微乎其微了。这个数是以英国数学家史丘斯(Skewes) 的名字命名的，是研究素数分布时出现的：

$$10^{10^{10^{34}}}$$

一局象棋的可能步数为

$$10^{10^{50}}$$

数量级。哈代曾经指出，假如拿宇宙来做一个巨大的三维棋盘，质子做棋子，两个质子的位置交换做为这个原子游戏的“一步”，那么可能的步数竟然奇迹般地就是史丘斯数。

假如完全写出来，史丘斯数有多少位呢？维弗（Warren Weaver）博士曾有过令人惊讶的描述。他说，假定我们用微型字体来印刷，每英寸印一百万个数字；假定我们能让一行数字延伸到宇宙的直径（约 4×10^{28} 英寸）；假定 20 亿个工人从宇宙诞生时刻起（大约 2000 万亿年前），就日夜不停地以每秒一百万行

的速度印制那些数字；经过这些超乎想象的劳作，也只能印出10^{72}位数字。这几乎还算不上史丘斯数的零头的零头。

33° 妙语

吉本（Edward Gibbon）的话："一千支利箭立刻穿透了那不幸的普罗布斯的胸膛。"也许是英国文学中最令人难忘的数字名言。[18]

34° 一句双关[19]

为什么聪明人少见，而蠢人数不胜数？

因为心中无数，所以无数。

35° 无穷的平方根

三一来了个年轻人，
计算了无穷的平方根。
可他数不清它的位数，
满怀着烦恼和不安，
丢下科学皈依了神。

36° 数学家的同心结

爱丁顿爵士在《科学新路》（1935年）里说，"奇异的'无穷大'令人又爱又恨，没有哪个理性的物理学家会跟它沾边儿。也许正因为这个，数学家才拿一个像同心结的符号来代表它。"

π

所有数中，最有名的是那个普遍以希腊小写字母π标记的

18 普罗布斯即罗马奥热流（Marcus Aurelius Probus）皇帝（276～282在位）。吉本这句话见他著名的《罗马帝国衰亡史》第一卷第12章。

19 这是17世纪洛夫莱斯（Richard Lovelace，1618～1657?）的一句双关语。

数；它特别代表圆的周长与直径之比。它经历了漫长而有趣的历史，在岁月中得到了更好的近似。

37°《圣经》时代的 π

古代东方常粗略地用 3 作为 π 的值。我们可以在《旧约·历代志下》第四章（4：2）（类似的记载也见《列王记》）看到："他又造一铜海，样式是圆的，径 10 肘，高 5 肘，围 30 肘。"这说明，那时希伯来人近似以 3 作为圆周长与直径之比。这相当于拿圆的内接正六边形的周长来近似圆的周长。π 从粗略的近似 3 开始，越来越精确，到 1967 年，它的精度已经到了小数点后面第 50 万位。

38° 古埃及的 π

在兰德草纸卷（大约公元前 1650 年的古埃及文献，包含了 85 个数学问题）中，问题 41，42，43 和 48 涉及了圆面积的计算。在这些问题中，圆面积都是拿（8/9）直径来平方。我们还不清楚这个"化圆为方"的公式从何而来，但与问题 48 相伴的一个简单的几何图形（复制在图 8（a））提供了可能的线索。它原来大概是一个削去了四角的正方形。如果仔细画（图 8（b））；它看起来就像用正八边形来逼近正方形的内接圆。

假定圆直径（即正方形的边）为 9，八边形的面积应为

$$81-4(9/2)=63$$

从而与圆有着相同面积的正边形的边长大约为 $\sqrt{63}$，也就近似等于 $\sqrt{64}$ 即 8。就是说，等面积的正方形的边长大约等于给定的圆直径的 8/9。

假定那个古埃及的"化圆为方"的公式是正确的，也就是假定

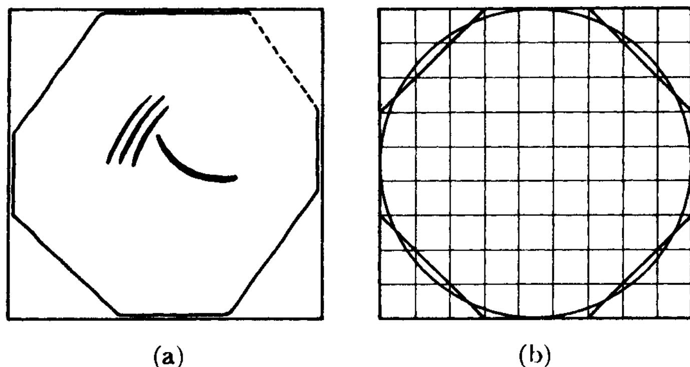


图 8 (a) (b)

$$\pi d^2/4 = 64d^2/81,$$

那么，

$$\pi = 256/81 = (4/3)^4 \approx 3.1605$$

在那个年代已经算 π 的很不错的近似值了。

39° π 的有理数近似

公元 480 年左右，中国的机械工程师祖冲之给了一个有趣的有理数近似：355/113 = 3.1415929…精确到小数点后第 6 位。令人惊讶的是，它只用了前 3 个奇数，每个重复两遍。大约 1585 年，安东尼松（Adriaen Anthoniszoon）也发现了这个古老的中国近似。这显然是一个幸运的巧合，因为他恰好证明了

$$377/120 > \pi > 333/106$$

接着，他将分子和分母平均，以得到"精确的" π 值。有证据说，奥托（Valentin Otho，是早期星表作者雷蒂库斯（Rhaeticus）的学生），可能在更早的 1573 年就在西方世界引进了那个比值。

1849 年，德戈尔德（de Gelder）用 355/113 获得了修正圆周

长的近似欧几里得解。如图 9，令 $AB=1$ 为给定圆的直径，作 $BC=7/8$ 垂直 AB 于 B。将 AB 延长到 $AD=AC$。作 $DE=1/2$ 垂直 AD 于 D，令 F 为 D 到 AE 的垂足。作 EG 平行于 FB，交 BD 于 G。读者可以证明：

$$GB/BA=EF/FA=(DE)^2/(DA)^2$$
$$=(DE)^2/[(BA)^2+(BC)^2]$$

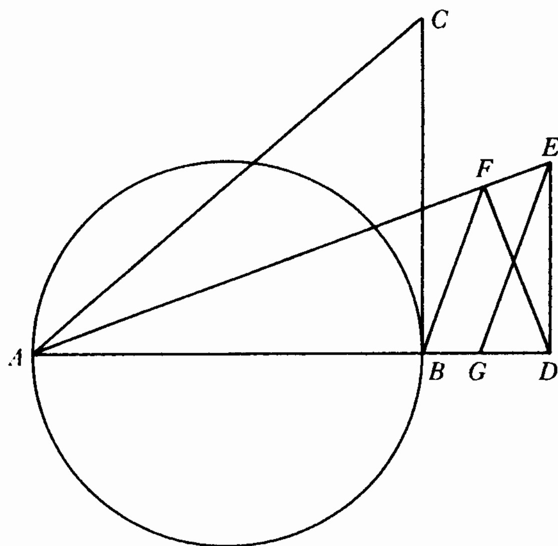


图 9

于是，$GB=4^2/(7^2+8^2)=16/113=0.1415929\cdots$ 即精确到小数点后第 6 位的 π 的小数部分。圆的周长应该是 3 倍直径加上线段 GB。

40° 鲁道夫数

德国人鲁道夫·凡·修廉（Ludophine van Ceulen，1540～1610）用经典的内外接正多边形的方法，用 2^{62} 边形把 π 算到了小数点后面 35 位。他的大半生都奉献给了这个使命。他的成就

是非凡的，所以人们把那个数镌刻在他的墓碑上，今天还有德国人称它为“鲁道夫数”。最近人们还在寻访那块墓碑，可惜没找到，可能已经不在了。

41° 为了 π 的记忆

因为对 π 的好奇，人们想出了五花八门的技巧来背诵它。下面是奥尔（A. C. Orr）的打油诗，出现在 1906 年的《文学欣赏》。人们只要用字母数来代替每个单词，就得到 π 的前 30 位：

> Now I, even I, would celebrate
> In rhymes inapt, the great
> Immortal Syracusan, rivaled nevermore,
> Who in his wondrous lore,
> Passed on before,
> Left men his guidance how to circles mensurate. [20]

几年后，在 1914 年的《科学美国人》又出现了类似的记忆“口诀”：

> See, I have a rhyme assisting my feeble brain, its tasks ofttimes resisting. [21]

还流传着另外两个：

> How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics. [22]

20 现在我也能用诗句赞美那伟大不朽的叙拉古人（即阿基米德）。他的学问天下无双，指引着人们把圆度量。

21 看哪，我有一首小诗能帮我虚弱的头脑，经常不懈地工作。

22 它后面还可以接一句：All of thy geometry, Herr Planck, is fairly hard。大意是：啊，我多想喝酒，在经过了繁重的量子力学演讲之后。“普朗克先生，你的几何真是太难了。”

May I have a large container of coffee?[23]

23 能给我一大杯咖啡吗？

42° π的级数计算简史

1691 苏格兰数学家格雷戈里（James Gregory）得到无穷级数

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

1699 Abraham Sharp 在 $x = \sqrt{(1/3)}$ 时用 Gregory 级数正确地将 π 算到了小数点后 71 位。

1706 John Machin 用 Gregory 级数结合关系

$$\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$$

正确得到了 π 的 100 位小数。

1719 法国数学家 De Lagny 在 $x = \sqrt{(1/3)}$ 时用 Gregory 级数正确地将 π 算到了小数点后 112 位。

1841 英国 William Rutherford 用 Gregory 级数并结合关系

$$\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/70) + \arctan(1/99)$$

把 π 算到了小数点后 208 位，后来发现 152 位是正确的。

1844 速算专家 Zacharias Dase 用 Gregory 级数并结合关系

$$\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$$

正确地将 π 算到了小数点后 200 位。

1853 Rutherford 重新把 π 算到了小数点后 400 位。

1873 英国 William Shanks 用 Machin 的公式把 π 算到了 707 位。很长时期里，这一直是一项神奇的计算纪录。

1948 1946 年，英国 D. F. Ferguson 发现 Shanks 计算的 π 从第 528 位起就错了；1947 年 1 月，他正确地算到了 710 位。同

月，美国J. W. Wrench发表了π的808位数字，但Ferguson很快发现它的第723位错了。1948年1月，Ferguson和Wrench共同发表了复核和修正了的808位数字。Wrench用的是Machin的公式，而Ferguson用的是

$$\pi/4 = 3\arctan(1/4) + \arctan(1/20) + \arctan(1/1985)$$

1949　美国马里兰州阿伯丁市的军事弹道研究实验室的ENIAC电子计算机用了70个小时，将π算到了2037位。

1954　Nicholson和Jeenel用NORC计算机花13分钟将π算到了3089位。

1958　英国Felton用一台Ferranti PEGASUS计算机用30小时将π算到了10 000位。

1958　巴黎Francois Genuys用一台IBM704计算机用100分钟将π算到了10 000位。

1959　Genuys用IBM704用4.3小时将π算到了16 167位。

1961　华盛顿的Wrench和Daniel Shanks在IBM 7090上用8.7小时将π算到了100 265位。

1966　2月22日，M. Jean Guilloud和他在巴黎原子能委员会（Commissariat a l'Energie Atomique）的合作者们在STRETCH计算机上得到了π在小数点后250 000位的近似。

1967　就在一年后，他们又在CDC 6600上得到了π的500 000位。

43° π是无理数，也是超越数

早在1767年，兰伯特就证明了π是无理数，就是说，它不能表达为两个整数之比的形式。1794年，勒让得证明了π^2也是无理数。1822年，林德曼（C. F. Lindemann）证明π是超越

数，即它不是任意多项式方程的根：

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

其中 a_0，a_1，$\cdots$ a_{n-1}，a_n 均为整数。

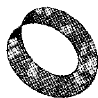
44° π 的统计

把 π 算到小数点后那么远的地方，并不仅仅是为了创造什么计算的纪录，而是有着更多的理由。一是为了确保 π 的“正态”统计信息。如果在一个实数的小数展开中，所有数字以相同频率出现，我们就说它是“简单正态的”；如果相同长度的数字串以相同频率出现，我们就说它是“正态的”。我们还不知道 π（甚至$\sqrt{2}$）是正态的抑或简单正态的。从 1949 年 ENIAC 开始，关于 π 的神奇计算就为着解决这个统计特征。从 π 的那些展开看，似乎说明它也许是正态的。香克斯（Shanks）在 1873 年计算的带错的 707 位又似乎说明 π 不是简单正态的。[24]

24 在前 2000 亿位中，10 个数字出现的频率偏差不超过十万分之八。

π 是正态的还是非正态的，这个问题当然不可能由计算机来解决。我们面临着一个典型的问题，它需要更高的数学才智，不能单靠计算。这类问题的存在，至少应该能部分医治“计算机万能”病，它在今天似乎颇为流行。不论普通大众还是学数学的同学，似乎越来越感觉任何数学问题都可以通过足够聪明的电子机器来解决。那样的机器不过是计算的能手和快手，只有对需要大量计算的数学问题，它们才有用武之地。

除了确定正态与否的统计特征，π 的计算还有一个作用。每台新的自动计算机器在投入日常使用前，必须通过运行实验，执行一定的编码和程序。最通常的检验办法，就是让新机器来计算和验证现成的 π。



45° 布劳维尔问题

丹麦数学家布劳维尔（Brouwer）为逻辑和哲学的原因，一直想找一个10年或20年内不大可能解决的数学难题，最后，他提出一个："在π的小数中，是否存在1 000个连续的零?"问题还没有答案。结果，这样的一个判断——π的小数确实存在那样的字节，在数学哲学的直觉主义学派（布劳维尔是它的领袖）看来，是一个不真不假的命题。因为，根据直觉主义者的观点，一个命题，仅当其证明能通过有限步骤构造出来，才能说它是真的；当证明需要无限步骤时，就可以说它是假的。除非构造了这样的证明，否则命题就既不是真的，也不是假的，而排中律不适用这样的场合。然而，如果谁断言在π的前10^{18}位中存在连续的1 000个零，那这个命题就要么是真的，要么是假的，因为我们显然可以通过有限的步骤来决定它的真假（尽管我们不知道它的真假）。于是，在直觉主义者看来，排中律并非普遍适用；它在有限的情形成立，却不能用于无限的情形。

假如π如我们猜想是正态的，那么在它小数点后面，1 000个零的字节不会只出现一次，而会出现无限多次，只是几率很小，大约是10^{1000}分之一。因此，证明π是正态的，比单纯回答布劳维尔的问题，要复杂得多；布劳维尔问题本身当然也是一个非常艰巨的问题。

46° π的立法

[下面的文字引自琼斯（Phillip S. Jones）的文章"π的新事"，发表在《数学教师》，1956年3月，pp. 120~122。]

经常有人说起（但很少有根据），要通过立法来决定π的

值。1897年印第安那州议会法案246号，是波瑟县的医学博士古德温（Edwin J. Goodwin）起草的。开头说：

> 本法案旨在引入一数学新知，供印第安那州教育依下列条款无偿使用——
>
> 第一条　印第安那州立法会决议：业已确立圆面积与边长为四分之一圆周长的正方形之比，等于等边矩形与正方形之比……[25]

25 “等边矩形”是正方形的特殊说法。这个条款相当于说，圆面积应该等于 $(\pi^2 r^2)/4$。其实，在这个“法案”里，根据不同的公式我们能发现4个不同的 π 值。据说，还有几个州也发生过类似荒唐的立法故事。

法案首先提交康纳尔斯（Canals）的下议院，然后转给教育委员会，建议通过。通过后，法案提交上院，被转给戒酒委员会，也建议通过。同时，法案流传开来，受到众多报刊的嘲笑。结果，尽管州公共教育局长很支持法案，急切希望全州的课本使用这一版权所有的发现，上院还是无限期推迟了对法案的进一步审议。法案全文和当时报刊的评论成了有趣的笑谈。

[看看下面法案的最后一条，我们就会完全明白法案的作者为什么竟有那么离奇的念头：

> 第三条　作者对教育的建议、对印第安那州的贡献，其价值更在于他对三分角、倍立方和化圆为方问题的解决已获代表本国数学思想先锋的《美国数学月刊》认可为科学贡献。
>
> 尤须注意者，这些著名问题曾长期被科学界放弃，将其作为超越人类理解力的不可解的疑难。]

47°“方圆病”

许多“方圆病” (Morbus cyclometricus) 患者，也就是为“化圆为方”走火入魔的人，[26]奉献了数不清的文献。这些东西通常都很可笑，有时简直难以置信，而作者还一定要让它发表。除了上面那条法案的例子，我们还有以下的例子。

26 这是德摩根为那些热衷“化圆为方”问题的人起的名字。

1892 年，有作者在《纽约论坛》宣布他找到了一个丢失多年的秘密，能证明 π 的精确值是 3.2。接下来的热烈讨论也大肆吹嘘这个 π 的新数值。

1934 年以来，美国许多大学和公共图书馆都从热情的作者那儿收到一本大部头，证明 $\pi = 3 + 13/81$。

很多“方圆病”患者出现在受人尊敬的高层人士中，其中有一个大学校长，一个华盛顿州下院议员，还有一个美国参议院议员。

算命学

许多古代数字系统都是字母系统，因此，用数值来替代名字里的字母便成为很自然的事情。这引出一门神秘的伪科学，即所谓的 *gematria*，或“算命学”，在古希伯来人和其他民族间曾十分流行，中世纪时又复活了。后来的“算命学”有一部分成了兽化 (beasting) 术——也就是巧妙地将可恶者的名字化为可恨的 666——《启示录》里说的不信上帝的野兽的数字[27]。在《走进数学圈》故事 130 里，我们讲了斯蒂菲尔 (Michael Stifel) “兽化”了教皇利奥 (Leo) 十世，邦古斯 (Father Bongus) 兽化了马丁·路德 (Martin Luther)。随宗教改革的兴起，这些

27 《启示录》第 13 章：“让有学问的人都算兽的数目，因为这是一个人的数。它的数是 666。”

“洪水猛兽”不断涌向了罗马的教皇们。

48° 拉丁文的“兽”

读者大概有兴趣检验下面几个兽化的名字（注意字母代表罗马数字，把 U 看作 V）：

（1） LUDOVICUS（大概指路易十四）

（2） SILVESTER SECUNDUS（Gerbert，西尔维斯特教皇二世）

（3） PAULO V. VICE-DEO

（4） VICARIUS FILII DEI

（5） DOCTOR ET REX LATINUS

（6） VICARIUS GENERIALIS DEI IN TERRIS

（7） DUX CLERI

49° 希腊文的“兽”

希腊人“兽化”一个人，是用希腊文写出他的名字，然后根据希腊字母的数字系统来计算那个数字：

1α	10ι	100ρ
2β	20κ	200σ
3γ	30λ	300τ
4δ	40μ	400υ
5ε	50ν	500φ
6 废除（digamma）	60ξ	600χ
7ζ	70ο	700ψ
8η	80π	800ω
9θ	90 废除（koppa）	900 废除（sampi）

人们曾如此“兽化”了 GLADSTONE。它写成希腊文，就是

γλαδστουη

也就成了“兽”。

50° 反戈一击

下面两个有趣的兽数见于摩根的《悖论集》（*A Budget of Paradoxes*）。

（1）“某个 James Dunlop 先生正拿666来复枪射杀罗马教徒，这时候，Chalmers 博士平静地说，‘干嘛呢，Dunlop，你该给自己一枪的。’说着递给他一张纸，将 IACOBVS DVNLOPVS 的数字加起来了。”

（2）“Davis Thom 先生看到一个叫 St. Claire 的年轻人在忙着琢磨兽数：他当即把 στ χλαιρε 的字母加起来，得到666。”

51° 最伟大的政治人物

根据算命术，可以用简单的英语“证明”，在罗斯福（Roosevelt）、丘吉尔（Churchill）和斯大林（Stalin）三人中，罗斯福是最伟大的政治人物。[28]

28 罗斯福的名字就含着数字666。

52° 阿门

阿门（amen）在希腊文里写作 αμην，难怪在一些基督手稿里，数字99出现在祷告的最后。[29]

29 amen 是《新约》的最后一个词。

53° 尼罗河等于一年

赫里奥多（Heliodorus，4 世纪）宣称，尼罗河恰好等于一年。因为在希腊的数字里，ΝΕΙΛΟΣ（Nile）的字母 N = 50，E = 5，I = 10，Λ = 30，O = 70，Σ = 200，加起来等于365，一年的天数。

算　　盘

今天初等数学里的许多计算模式，如长乘法和长除法，迟至15世纪才发展起来。进步如此迟缓，有两个原因：智力的困难和工作中遭遇的客观条件的困难。

首先是智力困难，我们或多或少把它忽视了。我们感觉古代的计数系统连最简单的计算都不方便，很大程度是因为我们缺乏对它们的了解。然而，至今还令人痛苦的是记忆那些基本的加法和乘法口诀，我们在小学的好多时光都被它们占去了。

另一方面，客观的困难却是实实在在的。没有足够多的方便的书写载体，任何算术的发展进程注定要遭受阻碍。要知道，我们的机械纸浆造纸才不过100多年，更早是手工用布做纸，价格昂贵而且稀有，即使那样，也是12世纪之后才传入欧洲。

早期类似纸张的书写材料是用水生芦苇做的纸莎草纸，古埃及人发明的，公元前650年传入希腊。可是，纸莎草纸太贵了，不可能大量用来打草稿。另一种书写载体是羊皮纸，是用绵羊或小羊羔等动物皮做的。这当然更难得了。还有更贵重的是小牛犊皮做的牛皮纸。大约2000年前，罗马人的书写工具是不那么方便的小写字板，上面涂一层蜡，用铁笔刻写。而在印度，是给类似的小板撒上面粉。在罗马帝国前后，也用沙盘来做简单的计算或画几何草图。当然，石头和粘土更早就用于书写记录了。在过去的百年里，我们的学校也用更为方便的石板和铅笔。

克服这些智力和工具困难的，是算盘（abacus，希腊文abax，沙盘的意思）的发明，也叫计算板，可以说是人类使用的最早的计算机械。在古代和中世纪世界的不同地方，算盘有不同的

样式，它的应用极为广泛，直到今天还在我们的文化里留下了深深的印记。在东方的许多国家，如今还使用着这样那样的算盘。算盘或计算板的基本思路是，用恰当布置在一组平行线上的筹码、一组平行凹槽里的小石子、或者一组平行线上的小珠子，来代表数字。算盘特别适用于定位的数字系统。

54° “魔手”

1945 年美军占领日本后，士兵们见识了日本商人和小孩在日本式算盘上演算。士兵们想嘲弄一下这种看起来很原始的玩意儿。他们觉得该炫耀自己现代机器的优越性，就在东京组织了一场计算比赛，请来 3000 多个观众。结果令美国兵大吃一惊。

一个 22 岁的日本交通部职员松崎（Kiyoshi Matsuzaki）有过七年的算盘特殊训练，对阵来自密苏里迪尔林（Deering）的士兵伍德（Thomas Ian Wood），他是部队的财务人员，有过四年的现代台式电子计算机的训练。松崎用普通日本算盘，战前价格 25 美分，伍德用的电子机器价值 700 美元。

只见松崎的手在算盘上灵巧地飞动，看得美国人眼花缭乱，当时就给他外号称“魔手”。竞赛中，“魔手”赢了所有六场加法比赛，其中一场领先伍德一分钟。他还赢了减法。伍德赢了乘法，但“魔手”赢了除法，而且赢了最后的综合四则运算问题。另外，“魔手”的错误也更少。

55° 算盘重回欧洲

法国数学家庞色利（Jean-Victor Poncelet）上尉参加了拿破仑 1812 年对俄罗斯的那场惨败的入侵。法军溃败后，他成了俘虏，被带到伏尔加河下游的萨拉托夫。他在那儿和当地质朴的居

民生活了两年，对用俄罗斯算盘教儿童的好处深有体会。刚释放回法国，他就在梅茨城的所有学校引进了算盘，然后在全国普及。

我们建议在今天的小学里用算盘，因为它能很好地教孩子学会不同进制下的位置计数和计算。

56° 数树

计算板的线可以横画，也可以纵画。其实，它们根本不需要画出来，它们可能的位置可以反过来由水平或垂直的一行（列）筹码来指示。于是，如果习惯横式的计算，这些线可以用一列垂直的筹码来代替，将它们固定在开始的位置，不再移动；这些筹码就表示横线的可能位置。这样一组初始的固定筹码叫“数树”，早在15世纪的法国算术书里就有具体的描述。图10表示数1492，计算板的横线已经被数树（一组圆圈）取代了。

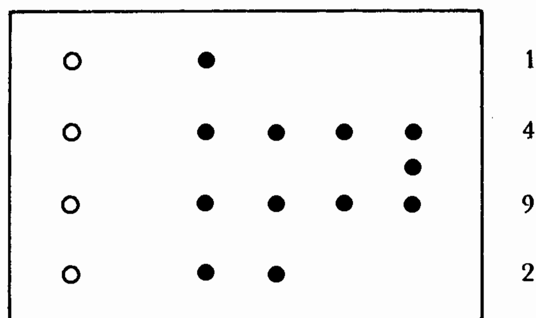


图10

57° 作为文化组成的算盘

过去，商人在商店柜台上都放有一个算盘或计算板。今天，我们还常把伙计算账的桌子称作“柜台”（counter）。

罗马人的算盘由带一组进行计算的平行凹槽的木板或金属板构成。筹码是可以沿凹槽移动的小石子。小石子的拉丁文是 *calculus*，我们的“计算”一词（calculate）就是从它衍生来的。

我们现在的加减法形式，连同加法的“进位”和减法的“借位”概念，很可能都是源自算盘上的那些计算过程。

58° 动词“计算”的起源

门宁格尔（Karl Menninger）在他卓越的《数字和数字符号，数的文化史》（*Number Words and Number Symbols, a Cultural History of Numbers*, The MIT Press, 1969）中，简要概括了动词“计算”在不同语言的起源。这个动词的根追溯到了最古老的计算工具——手指、计数节和计算板。

语言	词	本义	词源
希腊	pempazein pséphizein	“积五” “移动石子”	手指计算 计算板
拉丁	computare calculus ponere	“切削” “放置石头”	刻槽的计数签 计算板
中世纪拉丁	calculare	“移动石子”	计算板
法语	jeter compter calculer	“投掷” 来自拉丁 computare	计算板
英语	to cast to count	“投掷”来自 拉丁 computare	计算板

59° 一个反复出现的比喻

公元前2世纪，历史学家波利比尤斯（Polybius）写道：

> 国王的侍从就像那算盘上的珠子，全赖计算者的意愿，因此，他们的价值要么不过是一支粉笔（chalkos），要么就是一个天才（talent）！

应该记住的是，chalkos 和 talent 分别是算盘上最低和最高的两个数值。

波利比尤斯的比喻后来反反复复地出现，下面是 16 世纪初马丁·路德的例子：

> 在计算者眼里，所有算珠都是平等的，其价值在于他把它们放在什么位置。人在上帝面前也是平等的，但依上帝给他们安排的位置，他们是不平等的。

还有一个 16 世纪的例子（未知作者）：

> 在这瞬息万变的世界里的生命和所有的人，都像一个个算珠，可能举足轻重，可能微不足道，全看它在算盘的位置和它产生的结果。现在它在最高处，还用说吗？可还没等它俯视四周，主人就把它移走了，它不过依然和别的算珠一样，一颗小小的铜子而已。

下面 18 世纪中叶的诗句里也出现了那个比喻。原诗是法文，作者有几个不同的说法，还包括腓特烈大帝（Fredrick the Great，1665～1714）。

侍从不过算盘的石子，
价值依赖所在的位置：
得势时身价百万，
失落时一文不值！

60° *Das Hundert ins Tausend werfen*

这句话说“把一百当一千”，今天还能在德国听到。它指的是没有秩序的混乱状态，显然是从算盘时代流传下来的：把本该放在百位的算珠错放在了千位上面，从而引起混乱。马丁·路德曾大声疾呼：“恶魔愤怒了，它破坏了秩序，带来那么大的混乱，人们都不知道怎么思想了。”

61° 个人的总账

斯瓦比亚人（Swabian）有句俗话说：“我们所有的人都该在上帝法庭的火红算盘上算算自己的账。”

62° 骗术

后来（首先在法国）兴起了用金属模仿硬币来做算盘珠子的风尚，还在上面雕刻图案和文字。这些算珠当然不是真的货币，但容易被误会为真钱，还有人拿它来冒充真钱——就像如今常有人投假币乘公共汽车。正因为这一点，马丁·路德说，“……好像我是个不懂事的孩子或傻子，拿算珠当金币就能哄骗了。”有些算珠上刻有谨防假币的警告。

63° 政治宣传

算珠常常镌刻头像，歌颂统治者和征服者，也警告压迫者，

这就起着政治宣传的作用。算珠也经常作为荣誉勋章。

计　数　节

人们最早的计数方法，是利用一一对应的原理，通过某种简单的刻符方法来实现的。假如数目小，就记在手指上。更大的数就用卵石或石块来记录，或在泥土和石头上划痕，或用绳子打结，或在木条上刻槽。最后一种方法逐渐演变为广泛运用的记账方式，而带刻槽的木条就是计数节（tally stick）。

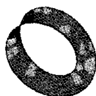
64° 原始的计数

原始的美洲印第安人为记录杀了多少敌人，就把每个死者的头皮割下来。原始非洲猎人为记录杀了多少野猪，就把野猪的獠牙聚集起来。马赛猎人生活在乞力马扎罗山地，是好斗的部落，那儿的未婚女孩儿为计算自己的年龄，每年用铜丝在脖子上绕一圈。今天的小孩常喜欢在日历上标记距圣诞节还有多少天。

以前酒吧侍者把客人的饮料账目记在黑板上。有段时间，在西班牙，顾客每要一种饮料，侍者就在客人外套的帽子里扔一颗石子儿，直到今天，“扔石子儿”还是“替人算账”的意思。

公元4世纪希腊雕塑家利希波斯（Lysippos）宣称，他每做一个雕塑，就存一枚金币。他死后留下了1500金币的遗产。普林尼（Pliny）由此推断利希波斯一生做过1500件雕塑作品。

德国诗人施蒂弗特（Adelbert Stifter）在一封信中讲过，他如何一天天等待和未婚妻重逢的那三个星期。他买来21个苹果，在那分别的三个星期里每天吃一个。



65° 计数节

有段时期，用刻槽的木条（即所谓计数节）来记账是相当普遍的。通常沿长度方向经过刻槽把木棍分裂成两根，欠债的人拿一根，债主保留另一根。[30]

作为正式的政府记录，计数节的应用在英国财政部达到顶峰。多年前，维修西敏寺时，人们从皇家国库里发现了几百枚计数节。这些木条是 13 世纪的东西，记录了欠税和缴税的账目。直到 1826 年，这样的木条还在发挥作用，连刻槽的方法都一样。

30 契刻计数应该是古人的通用方法。中国青海、宁夏新石器时代遗址也出土过带有刻槽的骨片。《列子·说符》有则寓言说，“宋人有游于道，得人遗契者，归而藏之，密数其齿，曰，吾富可待矣！”

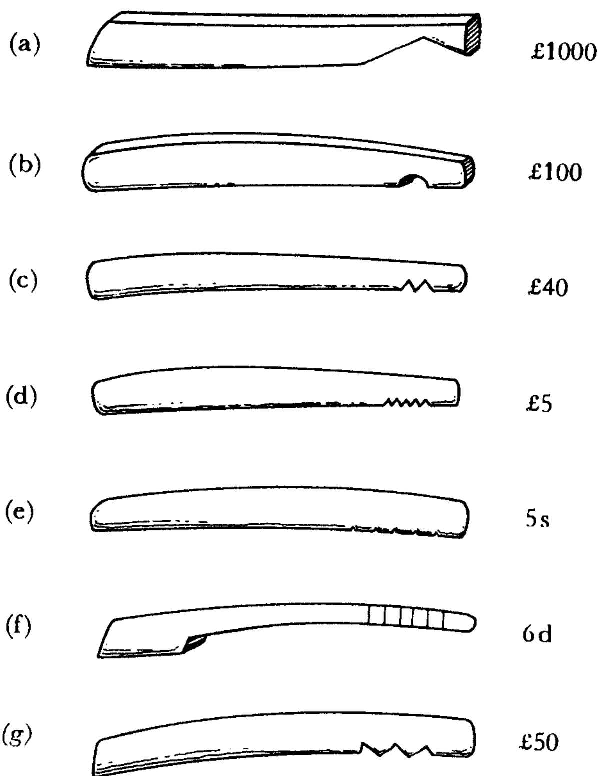


图 11

官方的刻槽法规靠着皇家财政大臣、伦敦主教理查德（Richard）在 1186 年写的《财政对话》(*Dialogus de Scaccario*) 流传到今天。

1000 英镑（£ 1000）的槽刻在末端，如手掌宽（图 11 (a))；

£ 100 槽宽如拇指，为区别£ 1000，槽形是弯曲的（图 11 (b))；

£ 20 槽宽如小指（图 11 (c))；

£ 1 槽宽如成熟的大麦粒（图 11 (d))；

1 先令的槽虽小但仍具槽形（图 11 (e))；1 便士则只是一道刻痕，不切割木条（图 11 (f))；

以上任意单位的一半，则刻槽或刻痕的长度减半：一道斜刻，一道垂直刻（图 11 (g))。

66° 象形文字中的计数痕迹

中国的象形文字里保留了许多刻符计数的痕迹。如图 12 (a)，“契”字由三个部分组成，上面的两部分，一个代表“计数的木条”，一个是“刀”（用来刻木条），下面是“大”。因此，代表“契约”的“契”字，本义为“一根大计数木条”。[31]

“册”（图 12 (b)）是捆在一起的一束计数木条，令人想起赫尔辛基坎萨利斯（Kansallis）博物馆里的俄罗斯税簿；“典”(图 12 (c)) 就是放在桌上的一堆计数木条。

31 这个解释颇为有趣，可惜一点儿不对。原来的“契”字没有下面，传统解说“像刀刻画竹木以记事者”（《六书正伪》）。后来下面加了“木”，楷书错写成“大”了。

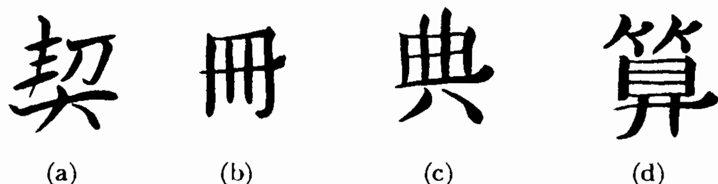


图 12

“算”（图12（d））字也代表算盘，下面的两只手举着中间的“算盘”，而算盘是“竹”（上面）做的。

67° 计数节与国会大火

英国财政部用了几百年的计数节。1782年下令废止使用，但已有的可继续用到1826年。1834年，官方收集的木条在国会大厦下面的火炉里焚烧，由于火炉过热，大厦也被烧毁了。

狄更斯（Charles Dickens）为这件事情添加了嘲弄的注解。有人建议应该把废弃的木条送给国会大厦穷人做柴烧。政府不愿那么做，想把它们毁了，就设法在国会大厦下面烧毁。接下来，政府又向那些穷人额外征税，来重建烧毁的大厦。

68° 诚实的木条

门宁格尔（Karl Minninger）在迷人的《数字与数字符号》一书里，引用了一个关于弗兰德斯画家勃吕盖尔（Pieter Brueghel，死于1569年）的故事，原是画家同时代的人讲的：

> 在安特卫普（Antwerp）时，他和一个女孩儿住在一起，本来是要和那女孩儿结婚的，可她总喜欢撒谎。他就和她定一个协议，她每说一次谎，就在木条上刻一道槽。他准备了一根很长的木条，如果木条刻满了，他们就不可能结婚。结果，木条没多久就被刻满了。

69° 英文的“score”

有证据表明，score一词的本义是“刻痕”：农夫每数20只牛或羊，就在木条上刻一道痕迹。后来，在英国财政部里，它又

被用来表示20英镑，由此生出诸如下面的句子来："比分是多少?""他付清了欠学会的钱。"

在莎士比亚《亨利六世》下篇第四幕第二场里，我们看到：

> 多谢了，好人们。不用付钱，吃喝都算在我的账（score）上。

同一幕第七场，又说

> 我们的祖先除了账本（score）没有别的书。

《麦克白》第五幕第七场，在悲剧结束时，说麦克白

> 他走得很好，得到了最大的报酬（score）。

70° 几个商务名词溯源

常用的商务名词如"股票"（stock）、"支票"（check）都源于英国人用双计数节的古老风俗。人们向英国银行贷款时，把数额刻在木条上。银行留下从木条剥离的一根细条或一块薄片，而把木条的主干（stock）留给借款人。于是，借钱的人成了"stock holder"（"持主干者"），拥有"银行的木条"。借钱者还钱时，得拿他的木条与银行保留的那部分细木条"核对"（check）。常说的"账目吻合"就源于这种木条的比对。

71° 三重节

在不太久远的时候，维也纳扫雪工人常用三重刻符的木条

——就是说，从一根木条分出三根来，中间部分给司机，两边的部分分别给装车和卸车的领班。结果，记录是三份，就像我们今天用复写纸记录一样。

有了两重或三重的刻符木条，就不可能作弊了。因为这个理由，这样的木条具有法律效力。

早在10世纪，双重的刻符木条就演变为复写记录。契约一式二份，写在一张折叠的草纸或羊皮纸上，在两份正文之间的空白处画押签名。然后，以锯齿或波浪形将两份契约分开，双方各执一份。这种文件被称作“divided papers”或“toothed papers”。今天我们用复写纸来实现同样的目的。

计　算　机

在自然科学、航海、商务、工程、行政管理和战争等数值计算十分重要的领域，日益要求快速而精确的计算。四项重大发明适应了这一需求：印度阿拉伯计数法、十进制小数、对数和现代计算机。

大多数早期电子计算机是为解决军事问题设计的，但今天的计算机是为了科学、商务、工业、行政、政府和其他目的。它们从奢华的工具成为当今发展不可或缺的重要手段。今天，中学生开设计算机科学的入门课程，到附近的大专院校去接触大型计算机，已经不是什么稀罕事情了。[32]巴贝奇的梦想（见《走进数学圈》275前面的历史记述）真的成为现实了！

32 读者别忘了，本书是20世纪70年代写的。中国的中学生要十多年后才逐渐开始接触计算机。

也许因为对现代计算机那惊人的本领怀有某种恐惧，人们有那么一种倾向，不公正（也不应该）地去嘲笑那些机器。

72° 计算机与推土机

正如推土机增强了人们的体力，现代高速电子计算机则扩展了脑力。推土机做的事情，需要一大群人做很长的时间，有的事情没有推土机，可能要辛劳地做一辈子，甚至根本不能做。同样，高速计算机能做的事情，需要一大群数学家做很长的时间，而没有计算机可能要辛劳做一辈子，甚至根本不可能做。推土机在一定程度上变革了我们的生活，计算机也一样，我们现在可以做以前做梦也想不到的事情。

73° 速度

IBM7090 电子数字计算机一秒钟能做 229 000 次加减法或 39 500次乘法或 32 700 次除法。

74° 巴娄（P. Barlow）的漫画

两个焦虑的官员站在一台大型电子计算机面前，审视着一张计算机的最后结果。一个官员恼怒地对另一个说，“我们那位老糊涂的秘书小姐最糟糕时也不会犯这样的错误！”

75° 米拉奇（J. Mirachi）的漫画

还是两个官员站在一台大型电子计算机面前，读着机器对一个线性规划问题的分析。一个官员对另一个说，“还是一样的答案。为了增加边际利润，就往汉堡包里多加面包屑。”

76° 买表

有个流传很广的荷兰教授的故事，他向一台很精密的计算机

提出这样一个问题："有两块表，一块被打破而且永远不走了；另一块每 24 小时慢 1 秒。我该买哪块呢？"计算机回答："买不走的那块，因为它每 24 小时能正确指示两次时间，而另一块要 120 年才正确一次。"

77° 超级计算机

国防部长麦克纳马拉（Robert McNamara）的夫人玛格丽特（Margaret McNamara）说，"现在担心计算机取代人脑还为时过早，"她提醒我们，"大脑是宇宙中最高贵的微缩物，虽然不过两三磅，却包含着 100 亿个神经细胞，每一个和其他神经细胞有着大约 2500 种可能的联络。要造一台有那么多可能选择的大型计算机，需要整个地球表面那么大的面积。"

78° 更便宜的机器

有人说过，人类大脑不仅是设计最精妙的计算机，也是惟一不需要技术劳动的产物。

度 与 衡

长度、面积、体积、重量和钞票的单位，在算术的实际应用中占有非常重要的地位，于是，流传着许多与不同的度量单位相关的离奇知识。

79° 长度和面积

初始的许多长度单位自然来自人体的不同部位。例如，在古埃及和苏美尔，一个方便的小长度单位是"腕尺"——从肘到

伸直的中指尖儿的距离。当然，这个单位因人而异。类似的单位还有如英尺（脚的长度）、掌尺（手的宽度）、掌距（手掌张开时拇指尖与小指尖之间的距离）、指宽（食指的宽度）、码（鼻尖到伸直的手臂端的距离）。

为了规范单位，“码”（yard）在英国法定为国王亨利一世的鼻尖到伸直手臂端的距离。“yard”一词源自昂格鲁－撒克逊语的“yarde”，意思是木尺，我们今天也常说“码尺”。服装商人惯用码尺来度量布匹，把布匹展开，从鼻尖开始量到张开的手臂。因为这种丈量方法，法定的“码”成为一布码“加一把”。1439 年，它成为一布码“加一拇指”。一纳尔（nail，指甲）等于一码的十六分之一或 2.25 英寸，现在已经废止了，不过还用于丈量布匹。“掌尺”现在几乎只用来量马的身高，规范为 4 英寸。一掌距等于半腕尺。

厄尔（*ell*）也是一个长度单位，今天很少用了，各国的变化也很大，本义是“手臂”或“前臂”。于是，厄尔似乎等于腕尺。在英国，一厄尔法定为 45 英寸——这样的前臂就太长了。

罗马人用十二进制，因此把一尺划为 12 等分，叫“unciae”（即十二分之一），我们的英尺（inch）也就由此而来。1324 年，英国国王爱德华二世（Edward II）规定一英寸为“三颗饱满干燥的顺直排列的大麦粒”的长度。

在印刷术中，一“行”等于十二分之一英寸，而一个“全身”（*em*）等于六分之一英寸。“全身”的本义是排版的大写字母 M 的宽度。“半身”（*en*）为全身的一半，行型打字机以“半身”为单位来度量打印的一行文字。

土地测量员用的“链”（*chain*）规定为 22 码，由 100“节”（*link*）构成。“杆”（*pole* 或 *rod*）的本义为测量用的木杆，等于

两步，5.5码或四分之一链。1514年，一杆法定为祷告仪式结束时走出教堂的前16个人的左脚长度之和。一杆的正方形的面积（30.25平方码）叫*perch*。一亩（*acre*）假想为一群牛一天（或一个早晨）耕作的土地，定为10平方链，或4840平方码。四分之一亩（2.25平方链）叫*rood*。

“浪”（*furlong*）的本义是一道犁沟的长度，现在为八分之一里或220码。反过来，里（*mile*）来自拉丁文“*mille passuum*”，意思是一千步。罗马军队行军的步伐，像今天童子军的步伐一样，据说是30英寸，由此，一罗马里应该等于5000英尺。今天，不同国度的“里”悬殊很大。里格（*league*）是另一个在全世界变化的长度单位，在英国曾等于12浪，但今天约合3里。

“寻”（*fathom*）等于二码，原来指的是一个人张开双臂所能拥抱的范围。“寻”常用于测量海的深度。链长（*cable's length*）严格等于十分之一海里，而“海里”大约等于200码或100寻。今天，“链长”在100寻到140寻之间。英国海军的链为12.25寻（被称为“短链”），15寻长叫一个“长链”。

80°“一码是一码”

老师：国王亨利一世规定一码应等于他的鼻尖到他伸直的手臂端的距离。

学生：他就因为这个才成为英国的标尺（ruler，即统治者）吗？（韦恩）

81°“节”非“结”

航海的“节”（*knot*）是速度而非距离，只用于计量船的速

度。一节等于每小时一海里。船的记程绳每隔1/120海里打一个“结”（*knot*）。当绳子扔在船尾，船员就来数30秒内经过了多少个结，从而计算船每小时走多少海里。

82° 体积

“桶”（*barrel*）是多变的容量单位，例如，一桶葡萄酒包含31.5加仑，一桶啤酒包含36加仑，而一“干桶”几乎可以是任何容量。“*barrel*”一词源自法语“*baril*”，而它又源自拉丁文“*barre*”，意思是木条，因为桶是木条做的。“大桶”（*hogshead*）是量酒（葡萄酒或啤酒）的大容量单位，数值不一定，通常为63加仑。“中桶”（*kilderkin*）是古老的啤酒容量单位，等于半桶或18加仑。“小桶”（*firkin*）等于四分之一桶，如果是啤酒，则一小桶等于9加仑。

“蒲式耳”（*bushel*）是干体积的度量，等于4配克（*peck*）或32（干）夸脱（*quart*）。不过，英国的蒲式耳比美国的大。与蒲式耳有关的容量单位还有“袋”（*sack*）、“斗”（*coomb*）、“焦耳仑”（*chaldron*）、“韦”（*wey*）和“拉”（*last*），现在都废止不用了，以前是如下定义的：

1 sack = 3 bushel

1 coomb = 4 bushel

1 chaldron = 36 bushel

1 wey = 40 bushel

1 last = 80 bushel

“袋”的大小随时在变。“焦耳仑”几乎只用于度量煤、焦炭和石灰，1焦耳仑的煤大约重9/7吨。

加仑是液体的度量，和蒲式耳一样，英国的加仑不同于美国的加仑。英制加仑等于277.42立方英寸，美国加仑等于231立方英寸。不论英美，1加仑都等于4夸脱，1夸脱等于4品脱（*pint*），1品脱等于等于4及耳（*gill*）或1/4夸脱（*quatern*）。*pint*一词源自拉丁*picta*（绘画或做记号），经过西班牙文"pinta"（一点或一个记号）到法文"pinte"。这样，它的意思就是，在容器边缘刻一个记号，标记1品脱的位置。旧时的单位中，1"杯"（*glass*）等于六分之一品脱，后来成了八分之一品脱。在后面的情形，"诺金"（*noggin*）等于两杯——就是说，诺金和及耳是一样的。

标准美国加仑过去是英制的"老葡萄酒加仑"，由两种方式决定：6英寸深的直径为7英寸的圆柱的容量，或者，231立方英寸的容积。有趣的是，当π取22/7时，两个定义是等价的。

83° 重量

"磅"（*pound*）是重量单位，在不同时期和不同国家有所不同。在美国和英联邦国家，磅是两个法定的单位之一：称量寻常物品的常衡制磅（*pound avoirdupois*，7000格令（*grain*），分为16盎司（*ounce*））和称量金银珠宝和药物的金衡制磅（*pound troy*，5760格令，分为12盎司）。

"*ounce*"一词与"*inch*"有着相同的语源。罗马人把他们的磅像尺那样划为12等分，叫"*uncia*"（十二分之一），我们的"*inch*"和"*ounce*"就由此而来。

曾经多变的单位"石"（*stone*），在英国规定为14磅。更大的重量单位是"担"（*hundredweight*），在美国等于100常衡制

磅，而在英国等于112常衡制磅。“担”的四分之一（*quarter*）也是一个单位。在美国，一吨（*ton*）等于2000磅，有时也称“短吨”（*short ton*）。英国、澳大利亚和美国海关用“长吨”（*long ton*），等于2240磅。

“皮重”（*tare*）指货物的包装材料或容器的重量，通常应从总重量扣除。*tare* 也指无货物和乘客的空车重量。在化学中，*tare* 还是用以平衡一个容器重量的配衡体。

在英国，一捆老干草重56磅，新干草重60磅，而稻草重36磅，都叫“捆”（*truss*）。36捆为“堆”（*load*）。

“钱”（*pennyweight*）为金衡制24格令，即1/20盎司，原来用以称量英国旧时的银质硬币，相当于3个小银币（*denarius*）。

84° 吨位

船的“吨位”（*tonnage*）不是船的重量，而是以100立方英尺为单位度量其甲板下部的容量。例如，80 000吨位的皇后玛丽号（Queen Mary），其甲板以下的容量为8 000 000立方英尺。

85° 英国旧货币[33]

英国“便士”（*penny*）与德国“芬尼”（*pfennig*）有关，老盎格鲁-撒克逊便士则相当于古罗马的小银币（denarius）。

“法寻”(*farthing*)是四分之一便士的铜币。“farthing”的名称源自古英语“fower”,意思是“四”;中古英语的说法是“ferthing”。

一“先令”（*shilling*）等于12便士，或1/20标准镑（*pound sterling*）。“shilling”一词的来源尚未确定，不过有相似的德语“schilling”和丹麦语“skilling”。

33 1971年2月15日，英国将这里（和后面故事99、100）说的货币改为了10进制的。（原注）

许多欧洲国家都有叫“弗罗林”(*florin*)的硬币。最早的弗罗林出现在意大利弗罗伦萨，其名称因刻在硬币上的百合花而保留下来[34]，因为百合花是弗罗伦萨的象征。爱德华三世（1327 ~ 1377）时代，英国弗罗林相当于6先令。英国后来的弗罗林（最早铸造于1849年）等于2先令。

34 *Florin* 源自 *flore*，就是“花”。

“克朗”（*crown*）是价值5先令的银币，之所以叫“crown”，是因为它的一面印有王冠（crown）的图样。当然，半克朗等于2先令6便士。

“几尼”（*guinea*）是英国老硬币，最初大约等于20先令，但1717年后固定为21先令——大概某个拍卖商还藏有这样的老货币。“guinea”的名称的由来，是因为1663年开始时，它是用非洲几内亚海岸（Guinea Coast）的黄金制作的。大约在1813年，几尼的制作停止了。

1英镑等于20先令，或240便士，原来等于1磅银。

沙弗林（*sovereign*）是英国旧时金币，等于2镑18先令，是为了广泛使用而设计的。“sovereign”的名称源于它印了英国统治者（overeign）的头像。

86° 为长度单位定标准

在法国国会决定开始建立度量系统之前，就有人提出制定标准长度单位的建议。

1670年，法国数学家兼里昂圣彼德大教堂牧师穆顿（Abbe Gabriel Mouton）提出以地球周长的六十分之一为一个长度单位，并对其进行十进制划分，为不同的分割赋予恰当的拉丁名字。大约同时，英国的雷恩（Sir Christopher Wren）提出以周期为半秒

的摆的长度为一个长度单位，这大约是古代腕尺长度的一半。1671 年，法国天文学家皮卡德（Jean Picard），1673 年，荷兰物理学家惠更斯（Christiaan Huygens），都倡导以 45°纬线的海平面上的秒摆的长度为单位，这大约比今天的米短 6 毫米。1747 年，康达米尼（La Condamine）则建议用赤道的秒摆。1775 年，梅西耶（Messier）仔细确定了 45°纬线的秒摆长度，还努力将其作为标准长度单位，可惜没能成功。

1789 年，法国科学院指派一个委员会执行新度量系统的计划。次年，米勒（Sir John Miller）向下院提出了英国的统一度量系统。大约同时，杰斐逊（Thomas Jefferson）提出了美国的度量系统，建议用 38°纬线（当时美国的平均纬度）的秒摆长度。

1790 年，因为社会对新度量系统的广泛热情，法国国会决定尽快落实统一系统计划。秒摆的设想被抛弃了，而选择四分之一圈子午线弧长的 1/10 000 000 为基本长度单位。今天的标准米是用某个选定的光波波长来定义的。[35]

35 米曾被定义为通过巴黎的那条子午线从赤道到北极点长度的千万分之一；1960 年，米定义为 ^{86}Kr 原子的橙红色谱线在真空的波长的 1650763.73 倍；1983 年，国际计量大会通过了米的新定义：一米的长度等于真空中的平面电磁波在 1/299 792 458 秒内通过的距离。这是以光速为标准来定义的。

87° 不幸的错误

梅尚（Pierre Francois Andre Mechain）也许是最倒霉的数学家。1744 年 8 月 16 日，他生于 Laon，从私人数学老师开始了他的职业生涯。他闲暇时研究天文学，受到法国著名天文学家拉兰德（Joseph Lalande）的注意，为他谋取了一个政府职位，从事天文观测和法国海岸线的测量。1782 年，梅尚当选为法国科学院院士，1785 年任《天文年历》（*Connaissances des Temps*）的编辑，他最重要的一些科学论文也发表在上面。1791 年，梅尚参与标准米（以四分之一圈子午线弧长的 1/10 000 000 为基本长度单位）计划，受命与卡西尼（Cassini）和勒让得一起测量敦克

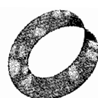
尔克与巴塞罗那之间的纬度差。他和德朗布尔（Delambre）一起，承担了测量罗德兹（Rodez）与巴塞罗那之间的子午线长的任务。1799 年，任务完成了，写进了梅尚给巴黎的报告。提交报告以后，他发现巴塞罗那的纬度计算有 3″的误差。为了维护自己的科学声誉，他隐瞒了错误，把子午线延伸到巴利阿里群岛，从而取代巴塞罗那。正当要实现他的计划时，1804 年 9 月 20 日，梅尚在巴伦西亚附近的卡斯特利翁－德拉普拉纳（Castellon de la Plana）染黄热病去世了。他不幸的错误被发现了，结果，他没赢得能干的科学家的名声，反被认为在标准米的确定中犯了重大错误。公平地说，错误不能算梅尚的，因为他面临着很多障碍，不可能测量更精确。

88° 中立之地

法国政府在塞夫勒（Sevres）圣云公园（Park of Saint Cloud）内选定一块地方作为国际计量局的地址，并宣布它为中立之地。计量局的费用由协约国的政府承担。计量局在国际计量委员会指导下展开日常工作，而委员会服从国际计量大会（由协约国政府派代表定期召开）的领导。

89° 误差

1821 年，盖拉坦（Albert Gallatan，当时是法国的一个部长）把一个铂金做的标准千克器复制品送到美国。经过著名物理学家阿拉戈（D. F. J. Arago）的鉴定，这个千克器比档案库存的标准千克器轻 1 毫克。然而，1879 年与英国的铂金千克器比较时，发现美国千克器轻了 4.25 毫克。1884 年，美国千克器被带到塞夫勒国际计量局，与两个和标准器相等的备用千克器比较，



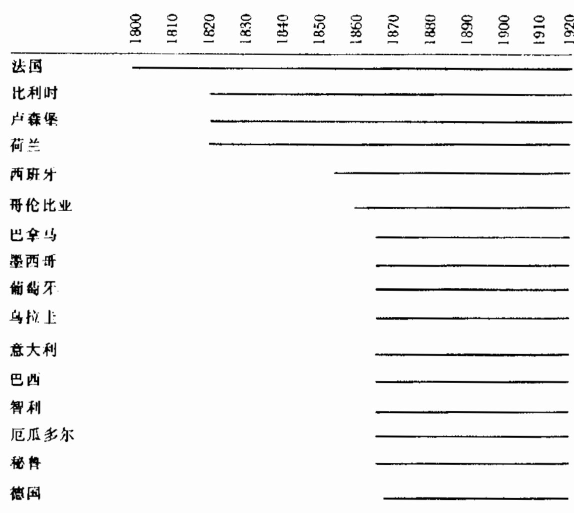
证实了那个差别。最终发现误差为 -4.63 毫克。

顺便说一句，自标准铂金千克器制作后，铂金价格猛增。当时价值大约 300 美元的铂金千克器，现在要值几千美元了。

90° 度量系统的进步

1799 年 6 月 22 日，法国大革命之后，法兰西共和国实行了计量系统。当然，新系统在法国流行经历了一定时间。系统起初仅仅是允许用，到了 1840 年才法定为强制使用。自 1799 年法国开始以来，多年过后，其他国家也陆续采纳了这个计量系统，到 1920 年，除美国和英联邦外，世界所有国家都采用了。那些例外国家在科学中也用计量系统，但不用于日常生活。

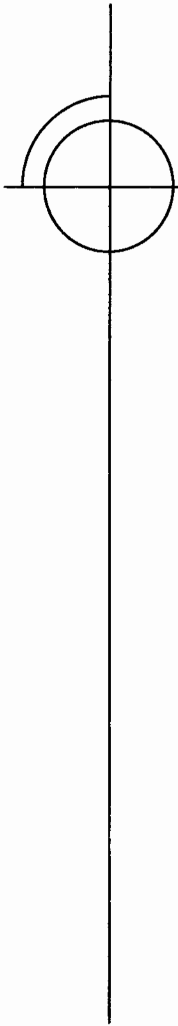
图 13 改编自吉林斯（R. J. Gillings）的《英国度量简史》（*A Brief History of British Weights, Measures, Signs, Symbols, and Decimal Currency*），说明了度量系统在世界各国被采纳的进程。



1800 1810 1820 1830 1840 1850 1860 1870 1880 1890 1900 1910 1920

奥地利
匈牙利
捷克斯洛伐克
摩纳哥
瑞士
挪威
阿根廷
南斯拉夫
罗马尼亚
哥斯达黎加
萨尔瓦多
黑山
瑞典
泰国
保加利亚
埃及
芬兰
尼加拉瓜
玻利维亚
危地马拉
突尼斯
洪都拉斯
海地
巴拉圭
古巴
菲律宾
刚果
丹麦
委内瑞拉
土耳其
拉脱维亚
波兰
希腊
爱沙尼亚
立陶宛
中国
俄罗斯
日本
摩洛哥
英联邦
美国

图 13



第二象限

从加减法到新教曲线

符号与名词

恰当的符号和名词在数学中起着举足轻重的作用，关于人们采用或建议的一些记号和名词，流传着许多有趣、奇异或可笑的故事。

91° 怀特海谈“+”和“-”

怀特海（Alfred North Whitehead，1861 ~ 1947）在他无与伦比的小书《数学导引》（1911）中，对符号“+”和“-”做过如下评说：“有一支古老的歌谣，它把海洋帝国派给了英国人，把陆地派给了法国人，而把浮云派给了德国人。当然，从德国人的浮云我们得到了‘+’和‘-’，这些符号产生的思想对人类幸福真是太重要了，几乎不可能来自海洋或大地。”

92° 高斯谈 +1，-1 和$\sqrt{(-1)}$

高斯在《双二次剩余理论》（*Theoria residiorum biquadraticorum*）中，对在复数里不幸用了“虚数”一词，表达了他的意见：“这门学问至今还被误会，还笼罩在一片神秘的疑云下面，主要就是因为错用了名词。例如，假如 +1，-1 和$\sqrt{(-1)}$不是被称为‘正’（*positive*）、‘负’（*negative*）和‘虚’（*imaginary*）单位，而称为‘直’（*direct*）、‘反’（*inverse*）和‘侧’（*lateral*）单位，就不会有那些模糊的认识了。”

93° 一个讨厌的记号

高斯写信给他的天文学家朋友舒马赫（H. C. Schumach-

er)，抱怨用 $\sin^2\varphi$ 记（$\sin\varphi$）^{2}："对我来说 $\sin^2\varphi$ 太讨厌了，尽管拉普拉斯也用过它……我们还是写（$\sin\varphi$）^{2} 吧，别用 $\sin^2\varphi$ 了，它倒应该拿来记 sin（sinφ）。"赫歇尔（John Herschel）用 $\sin^{-1}\varphi$，$\tan^{-1}\varphi$ 等写反三角函数时，发现这种记法与用 $\sin^2\varphi$ 记（$\sin\varphi$）^{2} 是不相符的。他倡导我们应该保留用 $\sin^2\varphi$ 记 sin（sinφ），用 $\log^2 x$ 记 log（log$x$），等等，这样才符合我们用 d^2x 和 $\Delta^2 x$ 记 ddx 和 $\Delta\Delta x$ 的习惯。他证明了他的反函数记号是合理的，因为那时已经习惯用 $d^{-1}V$ 记 $\int V$，用 $d^{-2}V$ 记 $\int\int V$ 了。

94° 形象说法

在布鲁克林麦迪逊（James Madison）中学，纳文（Murray Navon）开始给几何班上课，用符号"∴"。

"那是什么呀?"一个同学问。

"所以。"老师解释说。

"您的意思是说，'它们是三'[1]，是吗?"那同学问。（韦恩）

1 所以"therefore"与"they, re four"（"它们是四"）同音，难怪同学要纠正老师。

95° 最早的数理逻辑符号

[下面的文字经允许引自伊弗斯的同名论文，发表在《数学教师》杂志"历史记述"专栏，1959 年 1 月号，p33。]

尽管大家公认莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646 ~ 1716）是数理逻辑的创始人，但具逻辑（而非运算）性质的数学符号在他之前就用过了。例如，1634 年，埃里岗（Pierre Herigone）在巴黎出版了 6 卷本的《数学教程》（*Cursus mathematicus*），其中采用了大量逻辑型和运算型的符号。但他的逻辑符号只是一些表达的缩写。例如他用"hyp"简称"from the hypothe-

sis it follows”（“从它所依据的假定”），用“constr”简称“from the construction one has”（“根据构造”），等等。

第一个沿用至今的真正的逻辑性质的符号，也许是我们熟悉的代表“所以”的三点，“∴”。这个符号是瑞士数学家拉恩（Johann Heinrich Rahn，1622 ~ 1676）引进的，见于他1659年在苏黎世出版的用德语写的《方言代数》（*Teutsche Algebra*）[2]。其实，我们在书中看到，“∴”和“∵”都用来表示“所以”，不过前者占绝大多数。

2 罗马帝国势力大时，拉丁语是“普通话”，德语、法语等都算“方言”。所以，许多经典著作都是拉丁文写的。

拉恩的论文在欧洲大陆没什么大影响。不过，1668年，它的题为《代数学引论》的英译本在伦敦出版，极大影响了后来的英国作者。译本由布兰克尔（Thomas Brancker，1636 ~ 1676）翻译，佩尔（John Pell，1611 ~ 1685）编辑并做了修改和增补。译本和原文一样，也同时用“∴”和“∵”表示“所以”，不过“∵”用得更多了。

有趣的是，在拉恩和后来英国18世纪的教科书里，“所以”的两种三点符号在很多时候也顺便用来表示比例或者极值乘积与均值乘积的等式。

今天，在英国和美国，符号“∴”一般用来表示“所以”，而符号“∵”的意思是“因为”。两个符号的意思的分别，显然到19世纪以后才出现，而“因为”的符号不像“所以”那样得到广泛接受。除了个别符号逻辑的书而外，欧洲大陆的出版物里很少见到这两个符号。

96° 除号

拉恩的原始论文《方言代数》与其后来的英译本的不同影响，还可以用下面的事实来说明：尽管拉恩第一次引进了除法符

号÷，但这个符号今天只在英美流行；它在欧洲大陆通常用来代表减法。

97° 错误的荣誉

另一段奇特的历史可以追溯到拉恩的《方言代数》的英译本。在佩尔的增补中，有一种艰涩的处理丢番图方程 $ax^2+1=y^3$（其中 a 是非平方整数）方法，应归功于瓦利斯（John Wallis，1616 ~ 1703）和布朗克（Lord Brouncker，约1620 ~ 1684）。尽管佩尔和这个方程不再有其他任何瓜葛，但因为伟大的瑞士数学家欧拉的误会，那方程在数论里成了"佩尔方程"。

98°"镑"与"磅"

小学生常对表示英镑和磅的符号£ 和 lb. 感到好奇。两个符号都源于古罗马磅的"libra"一词。因为一英镑原来等价于一磅银，所以就用 Libra 的第一个字母来表示。这个符号起初只有一根小横线，但今天有两根了。其实，19 世纪初，也常用不带横线的小写字母"l"。加横线的原因，想来是为了把 Libra 的"L"与代表 50 的罗马数字"L"区别开来。法文有"livre"，意大利文有"lira"，都是从拉丁文的"libra"衍生出来的。

重量单位"磅"的记号"lb."来自拉丁文"libra"的第一和第三个字母。有段时期，这个记号也像£ 一样加了横线，现在在英格兰还能看到。在《不列颠百科全书》的一个早期版本中，它就被印成"℔"。

99° 便士与"钱"

英国老便士（penny）的符号是 d.，重量"钱"（penny-

weight）的符号是 dwt.。d. 来自“denarius”，大致相当于今天的罗马硬币。



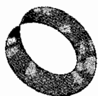
古罗马银币（49B. C. ~48B. C.）

100° 先令

“索里达”（solidus）是罗马康斯坦丁（Constantine）大帝发行的一种金币，简写为字母“s.”，后来逐渐拉长变成斜线（/），就叫“solidus”。金币在中世纪欧洲流通，约相当于 12 个银币（denarius）。和这金银币相应的盎格鲁撒克逊硬币是先令和便士，1 先令等于 12 便士。于是，在区分先令与便士的数目时，斜线也用来代表先令。例如，3/6 代表 3 先令 6 便士。

101° 盎司

盎司缩写“oz”的第一个字母可以解释为“*ounce*”的第一个字母，但第二个字母“z”呢？早年加利福尼亚开矿的时候，



似乎有一种西班牙硬币叫“onza de oro”，含有一盎司的金。字母“z”即来自西班牙词“onza”。

102° 百分数

百分比符号% 似乎经历了多年的演化。它经过了 p. ceto，p. $\frac{o}{c}$，p. 100 等阶段，17 世纪，它写成 p$\frac{0}{0}$。符号‰代表千分比。

103° 反其道而行

我们生活在美国的人有时觉得英国人很可笑：他们靠左行车，用左手拿叉；他们把表示乘法的点打在线上，把小数点打在数字中间——都和我们在美国的做法相反。类似的还有，法国和其他欧洲国家，常在我们用小数点的地方用逗号，叫“小数逗号”（*virgule decimale*）。

104° 美元符号简史

[下面的文字经允许引自默里（Sharon Ann Murray）的同名文章，发表于《数学教师》杂志“历史记述”专栏，1959 年 10 月，pp. 478 ~479。]

与大家接受的观念不同，美元的符号不是字母 U 和 S 的组合。其实，它源于西班牙。

除了那个爱国的动机，人们提出了许多理论来解释美元符号的起源。一个理论说，美元符号源自尼禄时代的某些罗马硬币上发现的特殊缩写 HIS。还有人提出，葡萄牙语中用以表示“数千”的符号 *cifrao* 也是一种可能的来源，因为这个葡萄牙语符号写出来很像我们的美元符号。一个著名历史学家提出一个理论，说美元符号源自玻利维亚波多西（Potosi）造币厂的标志。还有

理论说，它源自西班牙的“石柱”银币，17 世纪和 18 世纪曾通行于西班牙在美洲的殖民地。银币上印着赫尔克里斯石柱，据说石柱后来被复制到商务文件上。“石柱说”很有力，因为绕在石柱上的纸卷或旗帜令我们想到美元符号里的“S”。还有些人把美元符号与数字 8 联系起来，由此认为它源自西班牙元，即所谓“a piece of eight”，因为它等于 8 个更小的单位“reale”。前面说的“石柱元”在石柱之间有一个“8”，它与石柱的组合可能就是美元符号的起源。在另一些人看来，“八元”的说法说明美元符号是字母 p 与数字 8 的组合。这些旧时学说多少有些道理，但没有一个理由充分的，也没有得到文献和实物的证明。

美国数学史家卡约里（Florian Cajori）最终解决了美元符号的起源问题。他以科学的细心，根据大量历史证据，将美元符号的起源上溯到 16 世纪西班牙语“pesos”的缩写 pss，ps，和 p^s。大约 1775 年，在美洲和西班牙人做生意的英国人把流行的 p^s 写成了 $ 。美洲的西班牙人把 ps 或 p^s 写在数字后面，但习惯把£写在数字前面的英国人，把那缩写移到了数字左边。在卡约里提供的证据里，特别是波尔兰克（Oliver Pollack）1778 年给克拉克（George Rogers Clark）的信，令人信服地说明现代美元符号的形成。其中，p^s 和现代符号 $ 同时出现了，后者无疑是前者的简写。若干年以后，其实是到了 19 世纪开始之后，美元符号才出现在印刷物中。

“元”(dollar)似乎源自德语“thaler”，即“Joachimsthaler”的后缀，是 1518 年左右在波西米亚的 Joachimsthal 发现的一种钱币。

105° 印刷工说了算

有个时期，有人建议可以用符号[symbol]和[symbol]代替常数 e 和 i。但

印刷工人觉得没必要引进新符号，于是旧符号保留至今。

数学记号受印刷工人影响的其他例子，见《走进数学圈》故事 307（斜线代表分数线），故事 333（感叹号代表阶乘）。

106°“这就是要证明的”

欧几里得《原本》的每个证明都以“这就是要证明的”结束，这句话已经习惯简写为 Q. E. D.（*Quod erat demonstrandum*），这习惯由来已久，我们国家过去的许多中学几何课本也都那么写。今天，我们常用最早由哈尔莫斯（Paul R. Halmos）提出的符号 ▮（或某个类似的符号）来标记证明的结束。某个聪明人还建议，用 w^5 来简写“which was what was wanted”（“这正是需要的”）。

算术与代数

在这第二象限结束的部分，我们讲几个与中学和大学数学的几门主课有关的故事。其中许多材料可以作为“课堂笑话”（不同年级和不同性质），也容易扩展为一本小册子。相当多的故事是韦恩寄给我的，他是纽约的一名出色教师，他快乐幽默的个性在众多朋友和崇拜者中是出了名的。

107° 伦理算术

亚布罗诺维尔（Joseph Jablonower）在纽约市数学教师协会讲了一个故事：一个小女孩儿做算术功课，题目说，“狐狸吃了 2 只小兔子，”“狐狸吃了 3 只小兔子，”然后是一幅图，画着 4 只兔子，填“狐狸吃了____小兔子。”小女孩儿填的是“狐狸吃

了可怜的兔子。”亚布罗诺维尔先生说，“我们不能拿统计来取代道义！”（韦恩）

108° 认真的作业

老师：你还没有把那些数字加起来吗？

学生：噢，不，我已经加了十遍了。

老师：太好了！我喜欢认真的学生。

学生：谢谢。这就是那10个答案。（韦恩）

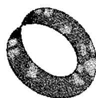
109° 一百年前的生活费

[下面的故事经允许改编自里德（Cecil B. Read）同题文章，发表在《数学教师》“历史记述”专栏，1959年2月，p124。]

教科书的作者发现，很难让课本内容顺应生活中的价格、工资等等。学生会一眼指出课本问题里的数字与现实生活的差异。不过，虽然有些滞后，课本还是提供了它出版时期的物价的有趣例证。

我们考察了大约一个世纪前的一本算术课本，有关的事实和价格如下。课本作者是格林里弗（Benjamin Greenleaf），课本的标题是《归纳体系中的算术引论，包括分析与综合法；完整解释和证明本学科的原理；供普通学校和研究机构使用》（显然，作者不相信简短的标题）。我们用的是1858年波士顿出版的“新铅版”。

关于食品价格，我们看到问题中提及了牛奶（5分/夸脱）、葡萄干（7分/磅）、黄油（12分/磅）、牛肉（9分/磅）、干酪（9分/磅）和咖啡（25分/磅）。也并不是所有价格都比今天的



低很多。例如，柠檬是每打（12个）88分，蔗糖每磅8分，茶叶每磅62分。至于其他商品，我们看到，一双好的靴子5美元，大衣12美元，背心6美元，手表73美元。在一个问题中，玉米的价格是每蒲式耳75分，麦子是95分，煤是10美元1吨。课本似乎都比较便宜，有个问题提到学生花25分买一本算术，67分买一本几何。

今天这一代学生如果浏览过去的课本，可能对某些说法感到疑惑，如一小桶葡萄干，一大桶糖浆，一公担鱼，一纳尔布匹。同样，他大概对四轮马车、两轮马车、马具和牛轭等东西的价格也缺乏可以比较的概念。他可能还想知道“戒酒葡萄酒”到底是什么东西。

然而，还不能匆忙下结论说那就是生活的好时代，我们应该先来看看一些工资水平。课本里涉及薪水的问题很少，但我们还是找到了几个：木匠一天工作15个小时，牧师的薪水是一年700美元，劳工一天的工钱是37美分（另一处提到的工钱是每周7美元），农场劳工吃住而外每月3美元，泥瓦匠涂墙面，每平方码10美分。

110° 空集

在一次10个填数字测验中，韦恩给一个学生打了错，因为他有个问题没有填写答案。学生愤愤不平地来到老师的办公桌前。

“韦恩先生，”学生说，“您没给我的这个答案打分！”

“当然没有，”韦恩先生回答，“你没把答案‘零’写出来。”

“可是我写了，”学生坚持，“答案是没有，而我那儿也正好没有！”

韦恩先生只好又一次发表他的三重零解释：“零不是没有！”那天，他正抱怨整天都在移动小数点，疲惫不堪。他说他感觉好沮丧，就像一个一阶多项式。

111° 半疯

老师：茶叶 40 分一磅，大比目鱼 29 分一磅，最坏的比萨饼出自意大利那不勒斯，冰激凌源自法国。我多大年纪了？

学生：50 岁。

老师：你一定是猜的。你肯定没按逻辑推理，是吧？

学生：不，我推理了。您看，我有个叔叔 25 岁，他才疯了一半。

112° 买柚子

“柚子怎么卖？”

“25 分两个。”

“一个多少钱？”

“13 分。”

“噢，那我要另外一个。”

113° 严密的逻辑

老师：你说你通过消去法得到 $(a+b)/(a-b)$ 等于 1。但是，如果你消去 a 和 b，得到“+”除以“-”，岂不更合乎逻辑？

学生：是啊，老师。可“-”还可以消去，就剩下 1 了。（韦恩）

114° 现代方法

萧尔（Harry Schor）抓住一个正在数手指头的学代数的学生。

“你在做什么呢？”他问。

“用十进制计算机，先生。”学生应声回答。（韦恩）

115° 当然

在一个数学课程会议上，一个委员问，“在这页上，你说‘一个未知数的线性方程’，而在下一页，你又说‘（两个未知数的）线性方程’。这里为什么加括号？”回答是，“因为这时学生已经学会去括号了！”（韦恩）

116° 遗留

最简短最逗人的错误证明是余数定理的证明。用除法：[3]

$$x-a)\,f(x)\qquad\qquad (f$$

$$\frac{f(x)\ -f(a)}{f(a)}$$

（韦恩）

3 这个算式其实是我们小时候的除法形式，意思是 $f(x)$ 除以 $(x-a)$，商 f 余 $f(a)$。

117° 来自卡洛尔的代数

对我这样满脑子是指数和方根的人，

那一切的乐事还有什么意思？

$x^2+7x+53$

$=\frac{11}{3}$

4 见卡洛尔的诗《四个谜》（*Four Riddles*）。

118° 多坏 1 度

艾伦坡（Edgar Allen Poe）在谈论两个作家同事马修（Cornelius Mathews）和查宁（William Ellery Channing）时写道，“用代数的语言说，M 先生是 *execrable*（坏透了），而 C 先生是$(x+1)$-*ecrable*。”[5]

5 *ex* 和 x 发音相同。于是，“M 是 x-ecrable，而 C 是$(x+1)$-ecrable。”这样就更明显了。

119° 约瑟夫问题

据赫格希帕斯（Hegesippus）讲的一个传说，著名犹太历史学家约瑟夫（Flavius Josephus，约 37 ~ 95）曾用计救了自己和朋友的生命。传说，当罗马人攻占 Jotapat 时，约瑟夫和他的朋友和 39 个犹太伙伴躲进一个洞穴。他们发誓，宁愿死，也不愿做征服者的俘虏。约瑟夫和朋友不想死，也不敢反对大家的意见，假装同意了。约瑟夫甚至提出一种安排，让大家以一种有序的方式去死。41 个人围成一圈，然后，每第三个人先死，直到最后剩下一个自杀。大家同意了计划。约瑟夫把自己和朋友安排在第 16 和第 31 个位置，得救了。

后来出现了多种形式的约瑟夫问题。在中世纪，问题考虑在暴风雨中挣扎的船上的 15 个土耳其人和 15 个基督徒。只有把一半的人抛入大海，船才可能幸免于沉没。基督徒让人围成一圈，然后提议，从某个位置开始，将每第九个人扔出甲板。基督徒的设计是要把所有异教徒扔进大海，而他们自己留下来。他们的安排如图 14，C 代表基督徒，T 代表土耳其人。次序可以用下面一句话中的元音的位置来帮助记忆：*From numbers' aid and art, never will fame depart*。[6] 这里 a，e，i，o，u 分别代表数目 1，2，3，4，5。于是，图中的次序说明 o 为基督徒，u 为土耳其人，e 为

6 这句话的大意是，有了数的帮助和技艺，名誉就不会远离。

基督徒，a 为土耳其人，等等。

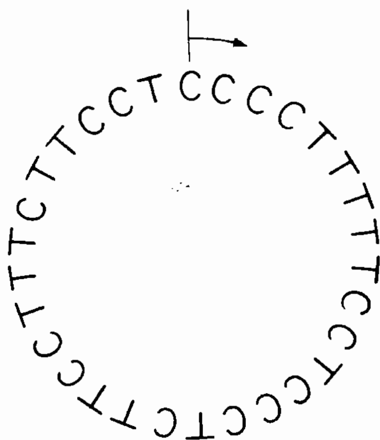


图 14

在别的形式中，所涉及的人物是基督徒和犹太人，学者和愚人，白人和黑人，无辜者和罪犯，诸如此类的。在这些问题中，具有数学知识的聪明人或种族主义者总是设法拯救“喜欢的”一群，而把基督徒或别的德行丢在一边。

日本形式的约瑟夫问题涉及一个男人的 30 个孩子，15 个是已故前妻生的，15 个是第二个妻子生的。因为父亲财产不多，不能平分给每个孩子，就和妻子商量，只能留给一个孩子。于是，妻子建议 30 个孩子围成一圈，每轮排除第 10 个孩子，直到最后留下一个。大家接受了建议。于是，妻子聪明地安排孩子们的位置，想在第一轮就把前妻的 15 个孩子排除。前妻的 14 个孩子被排除后，眼看就要轮到最后一个了，惊讶的父亲提出，现在应该从那个孩子开始反方向数。第二个妻子无法拒绝，但想到自己成功的机会很大，就同意了。但令她沮丧的是，她的 15 个孩子都被排除了，最后剩下前妻的孩子成为继承者。

一般的约瑟夫问题可以用简单的代数分析，1900 年由泰特（P. G. Tait）解决。它还有很多不同的形式。

120° 数学归纳法

头发稀疏的人叫秃子。假如有个人秃顶了，那么比他多一根头发的人当然也是秃子。根据数学归纳法，所有的人都是秃子。

121° 最小自然数原理

每个自然数都有趣。假如不是，那么令 M 为那些无趣自然数的集合。于是 M 不是空集。因此，由最小自然数原理，M 包含某个最小自然数 m。就是说，m 是最小的无趣的自然数。这样，m 岂非也是一个有趣的数！

122° 逆黄金律

求非奇异矩阵 A 的逆矩阵，方法之一是，通过系列基本行算子，将其化为单位矩阵 I。然后，同样的算子序列作用于 I，就将 I 转化为所求的逆 A^{-1}。这个过程可以概括为逆黄金律：作用于"他（A）"者也作用于"我（I）"。

123° 数学的万能钥匙

万能钥匙（它几乎能打开任何锁）的思想非常吸引人。里特伍德（D. E. Littlewood）曾说抽象代数是"数学的万能钥匙"（见《数学的万能钥匙：复代数理论浅说》，Hutchison 大学图书馆，1949）。他的描述很有意思，因为现代抽象代数研究结构，而结构渗透所有数学。结果之一是，抽象代数的名词渗透到了每一个数学领域。从这点看，现代抽象代数也可以说是"今

日数学的词库”。

124° 不朽

人们常想，人在弥留之际会很快重新经历他的整个一生。这重温的人生有最后的时刻，而这最后的时刻还有它最后的时刻，以至无穷。于是，死亡可能本身是永恒的，根据极限理论，人趋近于死亡但永远不会到达死亡。

几　何

125° 现身

斯文森（John Swenson）在纽约华莱（Wadleigh）高级中学教数学时，曾费力向一个迟钝的女孩儿解释矩形与长方体的区别。

“看见了吗?”斯文森博士说，“长方体占据着空间，就和人一样。你有前面和后面，头顶和脚底，还有左边和右边，是吗?”

“是的，老师!”女孩儿大声回答，“都在这儿呢!”（韦恩）

126° 定义

老师：什么是无限远?

学生：无限远就是你到达了它而它还在更前面的地方。（韦恩）

127° 职业数学

在牛顿高级中学，韦恩斯坦（Arthur Weinstein）问同学，“请说出另一种利用平行线工作的职业。”

“掘墓人。”同学们严肃地回答。（韦恩）

128° 漂流的智者

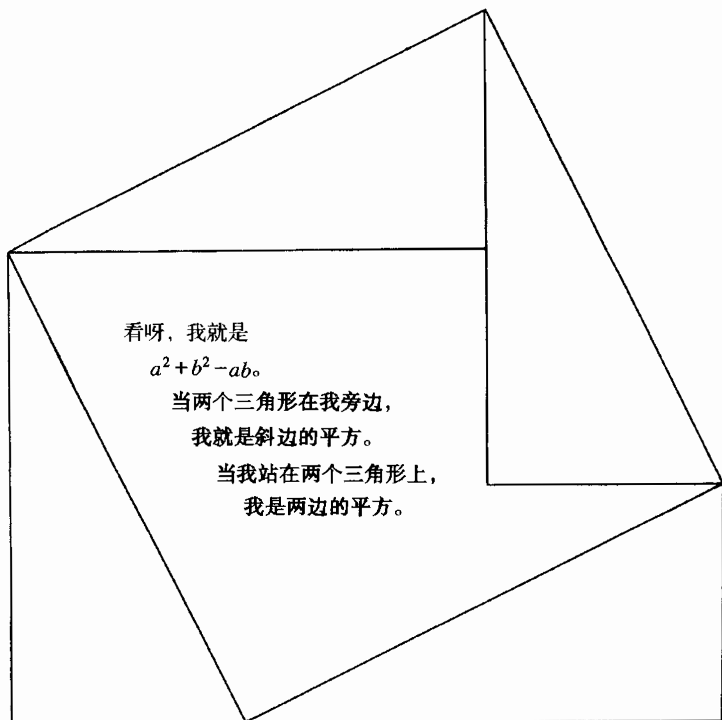
曾经有几个聪明人，讨论一个假想的场景，他们中间的某个人漂流到了一个荒无人烟然而很惬意的孤岛，一个人在那儿过了好多年。在他漂泊荒岛的那些年里，允许他自己选择一本书，那他该选什么书来排解多年的孤独呢？经过讨论，最后大家一致决定欧几里得《原本》可能是最好的安慰和消遣。

129° 达朗贝尔谈几何

达朗贝尔（Jean le Rond d'Alembert，1717 ~ 1783）常以很通俗的方式说一件事情。例如，他借物理学来说几何：“几何真理在某种意义上是物理学真理的渐近线，就是说，后者无限逼近前者，但永远不能完全到达。”

130° 毕达哥拉斯定理

下图和附带的诗句似乎是艾黎（Biddel Airy，1801 ~ 1892，曾是格林威治的皇家天文学家）设计的，引自格雷弗（Grave）《哈米尔顿传》第三卷（1889）。



131° 解析几何的钥匙

希尔伯特（David Hilbert，1862 ~ 1943）在《数学问题》（《美国数学会会刊》第 8 卷（1902），443 页）的演讲中说，“代数符号是书写的图形，几何图形是图像化的公式。”索菲·格尔曼（Sophie Germain）在《论表面弹性》（*Memoire sur les surface elastiques*）中表达过同样的意思：“代数不过是书写的几何，而几何是图画的代数。”

132° 空间通讯

日益高涨的太空探索的热情，宇宙其他地方可能存在生命的猜想，常常引发一些建议。例如，在地球上建立巨大的设施，与外面的观测者联络，告诉他们在我们这颗行星上存在着智慧。大家最赞成的是在撒哈拉沙漠或西伯利亚或其他某个大区域，做一个巨大的毕达哥拉斯定理的图形。所有智慧生命肯定都熟悉欧几里得几何的这个著名而非凡的定理，而要另找一个更好的设计，恐怕就很困难了。

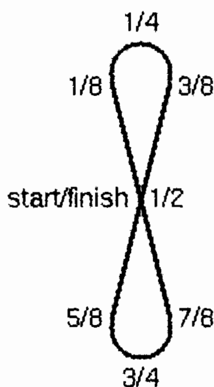
133° 欧几里得失败的地方

直线和圆有自我重合的特性——就是说，直线的每个线段都和其他同样长度的直线段全等，每段圆弧都和其他同样长度的圆弧全等。还有一种曲线也具有这样的性质，即圆螺旋线。德摩根说过，假如欧几里得允许用这三种曲线来构造几何图形，我们也就不会听说不可能的三等分角、倍立方和化圆为方问题了。感兴趣的读者可以自己试着去证明这一点，结果应该是一篇很有吸引力的文章，可以在《数学教师》杂志发表。

134° 想入非非

著名美国天文学家纽康（Simon Newcomb，1835 ~ 1909）在《一个天文学家的回忆》中告诉我们，弗吉尼亚大学有个研究生，坚持认为几何学家假定直线没有厚度是错误的。据这样的观点，这位同学发表了一部中学几何课本，得到了纽约一个有影响的学校官员的认可。结果，本书被接受（或几乎被接受）为纽约公立中学的课本。

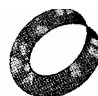
135° 曲线的名字

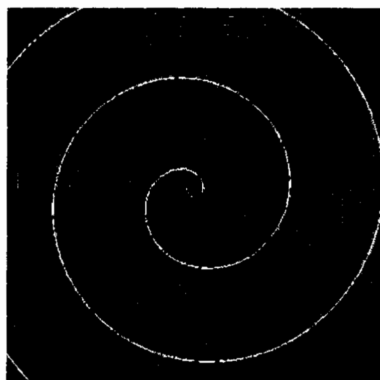


7 欧多克斯的8字曲线（hippopede 本意是马足），代表天体运行的轨迹（想象从空中看到的一只蚂蚁在地球赤道爬行的轨迹）。

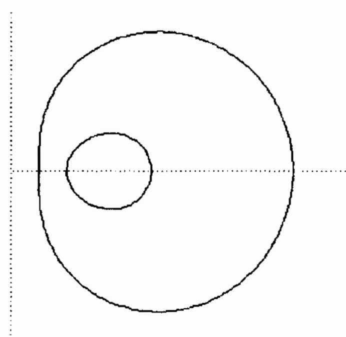
数学中有许多曲线是以发现者或后来研究者的名字命名的，例如：昂雅泽巫婆（曲线）、阿基米德螺线、伯努利双纽线、伯特兰（Bertrand）曲线、波尔查诺曲线、布里干（Bouligand）曲线、鲍迪奇（Bowditch）曲线、笛卡儿卵形线（椭圆）、笛卡儿抛物线、卡西尼卵形线、卡特兰（Catalan）三分角线、凯莱6次曲线、科奴（Cornu）螺线、科特（Cote）螺线、笛卡儿立方曲线、迪奥克里斯（Diocles）蔓叶线、欧多克斯的马足曲线（Eudoxus hippopede）、[7] 欧多克斯曲线（Eudoxus Kampyle）、欧拉螺线、费马抛物线、费马双曲线、费马螺线、高斯曲线、格罗农（Geronon）双纽线、希尔伯特曲线、海皮亚斯（Hippias）割圆线（trix）、洛必达3次曲线、科克（Koch）曲线、拉梅（Lame）曲线、里萨龙（Lissajou）曲线、麦克劳林（Maclaurin）三分角线、曼海姆（Mannheim）曲线、尼德米德（Nicomedes）贝壳线、帕斯卡蜗牛线、皮亚诺（Peano）曲线、珀尔修斯环线（Perseus spiric）、波索特（Poinsot）螺线、罗奎特（Rouquet）曲线、斯鲁兹（Sluze）珍珠线、切尔豪森（Tschirnhausen）3次曲线、维维安尼（Viviani）曲线。

许多曲面也有专门名字。

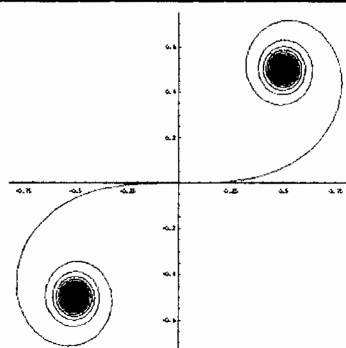




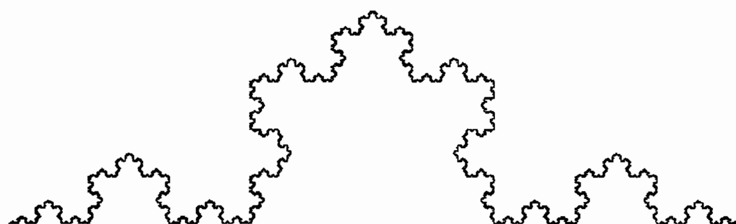
阿基米德螺线



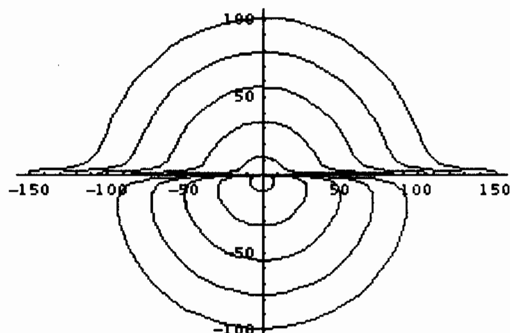
笛卡儿卵形线



科奴螺线



科克曲线



尼德米德贝壳线

136° 反演

在圆反演变换下，圆心的反演被映射到反演平面的无穷远点。这令人想起里柯克（Stephen Leacock）的年轻绅士和他的惊人的马术："罗纳德爵士什么也没说；他从屋里飞出，跃上马，疯了似地乱跑一气。"[8]

8 里柯克是加拿大名作家，这儿的故事见 *Nonsense Novels*，1911。

137° 猎狮

20 世纪 30 年代，一小群爱开玩笑的数学家以庞迪切尼（E. S. Pondiczery）的假名聚集在一起，假冒波达维亚皇家学院（Royal Institute of Poldavia）会员。他们选择假名和杜撰机构名的第一个字母正好满足 E. S. P.，R. I. P.（代表"extrasensory perception，rest in peace"，超感觉的理解，安宁的休息），因为这群人计划写一篇关于超感觉力的文章。文章从来没有印出来。

庞迪切尼的主要兴趣在于数学游艺，最有名的成绩发表在《美国数学月刊》（1938 年 8、9 月号，446 ~ 447 页），标题是"狩猎游戏的数学理论"。因为文章太滑稽，庞迪切尼请求《美国数学月刊》主编穆尔顿（Elton James Moulton）允许用假名皮塔（H. Petard）。主编答应了，于是出现数学文献中惟一一个假

作者用假名的例子。

皮塔的文章列举了16种在撒哈拉沙漠捕获野生狮子的方法。前9种归结为“数学方法”，接着是4种“理论物理方法”，最后三种是“实验物理学方法”。文章感谢了英国剑桥大学圣约翰学院的“无聊俱乐部”、“无用研究学会M. I. T分会”、普林斯顿大学的F. o. P.，以及“无数有名或无名、有意或无意的个体贡献者。”我们蒙《美国数学月刊》允许，在这儿选择12个皮塔方法。

I 数学方法

1 **希尔伯特或公理方法** 我们在沙漠的某一点放置一个锁好的笼子，然后建立如下逻辑系统：

公理1 撒哈拉的狮子类是非空的。

公理2 如果撒哈拉有一头狮子，那么笼子里就有一头狮子。

程序法则：如果p是定理，“p蕴涵q”也是定理，则q是定理。

定理1 笼子里有一头狮子。

2 **反演几何方法** 我们在沙漠中放置一球形笼子，人走进去，然后锁上它。我们操作对笼子的反演。于是，狮子在笼子里，而人在外面。

3 **射影几何方法** 不失一般性，我们可以认为撒哈拉沙漠是一平面。将平面投射到直线，然后将直线投射到笼子内的一点。那么，狮子被投射到同一点。

4 **波尔查诺－外尔斯特拉斯方法** 以南北方向的直线平分沙漠，则狮子要么在东部，要么在西部。假定它在西部。以东西

方向直线将其平分，则狮子要么在北部，要么在南部。假定它在北部。我们继续这个过程，直至无限，从而每一步都构筑了一道足够坚固的界线。选择部分的直径趋于零，因而狮子最终被捆在足够小的范围内。

5 **集合论方法** 我们看到，沙漠是可分空间，因而包含一个可数的稠密点集。我们可以从点集构造一个以狮子为极限的序列。然后，我们武装好自己，沿着序列稳步趋近狮子。

6 **皮亚诺方法** 根据标准方法构造一条经过沙漠每一点的连续曲线。我们已经知道，有可能在最短时间内穿过这样的曲线。我们带上长矛，赶在狮子通过以前穿过曲线。

7 **拓扑学方法** 我们看到，狮子至少有着环的连通性。将沙漠转换到4维空间，则我们可以施行一种变换，将狮子还原到有节点的3维空间。这样狮子就绝望了。

II 理论物理方法

10 **狄拉克方法** 我们看到，野生狮子本身在撒哈拉沙漠是看不到的。于是，假如撒哈拉有狮子，就是驯养的。猎获驯养狮子的方法就留给读者做练习。

11 **薛定谔方法** 在任意给定时刻，狮子以某个正的概率处于笼子中。坐下等着吧。

13 **相对论方法** 我们在沙漠周围遍撒狮子的诱饵，直到天狼星伴星的大部分。当狮子吃尽足够的诱饵，我们穿过沙漠投来一束光。光线将在狮子周围发生偏折，这时狮子双眼眩晕，我们就能毫无损伤地接近它了。

III 实验物理学方法

14　**热力学方法**　我们造一种半渗透膜，除了狮子而外可以透过任何东西。我们用它来扫过沙漠。

15　**原子衰变方法**　我们用慢中子照射沙漠。狮子变成放射性的，从而发生瓦解。当衰变充分进行时，狮子也就失去力量了。

138°　占卜板曲线

最有趣的数学藏品之一大概是“笔仙”，或者更准确说，是一种占卜板，19 世纪后期曾一度流行于英格兰[9]。人们相信控制占卜板的精灵是过去的数学状元，两个年轻女士就来要它写出它的边界曲线。占卜板几次都明确写出了极坐标方程：

$$r\theta = a\sin\theta$$

年轻的女士把方程的轨迹画错了，就感觉占卜板在撒谎。可是，当她们的数学老师纠正了错误，她们才惊讶地发现曲线和占卜板的边界线非常相似。[10]

曲线的轨迹如图 15，关于极坐标的轴对称，平面的每一半

9　占卜板是带两个小轮子的小木板，垂直立着一支铅笔，据说是为了写出问题的答案，而提问者的手指轻放在板上，不进行有意识的活动。oui-ja 板也是一种小木板，下有多条腿，立在更大的标记了字母的木板上，它能说出问题的答案。提问者仍然是手指轻放在板上，不进行有意识活动，相继触摸大木板上的字母。（原注）

10　罗吉（Sir Oliver Lodge）在《人之生存》（pp. 130 ~ 134）中相当详尽地记述了占卜板的事情。（原注）

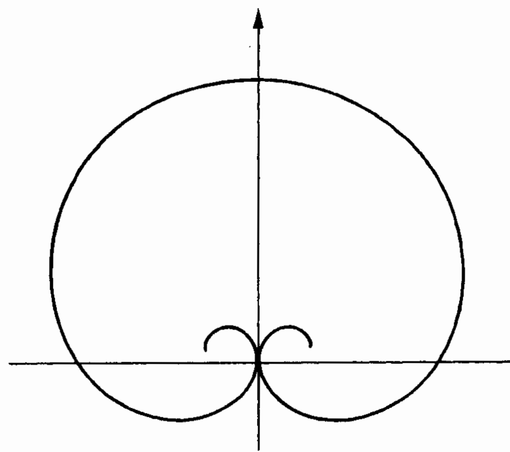


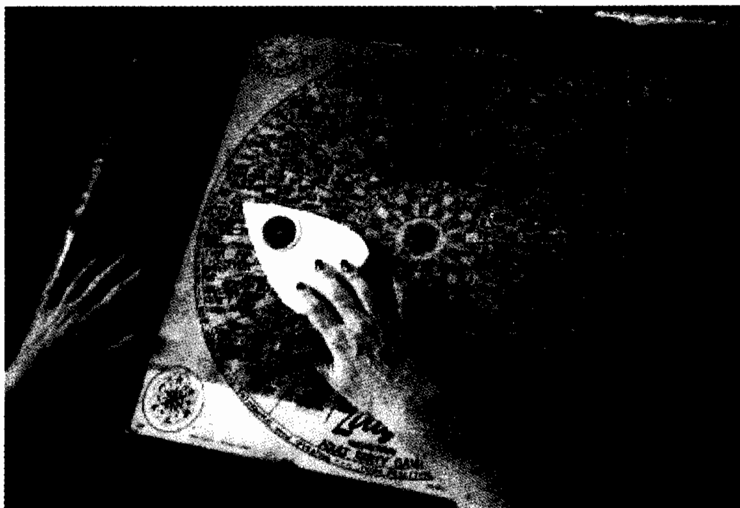
图 15

都有一个与轴相切于极点的无穷卵形线嵌套。曲线在轴上的截距为 a。

由于曲线享有可能源于占卜板的独特性，由于它惟一的别名 cochlioid 又被用来称呼其他曲线，所以人们建议命名它为占卜板曲线。

占卜板曲线有大量有趣的几何性质。可以证明，用半边占卜板形状的透明塑料模板，可以多等分任意角度，可以求圆弧长度，可以确定圆弧和扇形的重心。这种模板可以做成有用的量角器和绘图工具。这种曲线似乎被图形计算者们忽略了。在某些方面，它大概比常用的阿基米德螺线、双曲螺线和圆渐开线更优越。[11]

11 关于这种模板的数学和应用，见伊弗斯，“一种量角器”，《数学教师》，1948年11月，pp. 311～313。(原注)



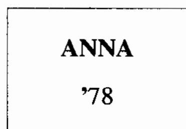
占卜板

139° 安娜

坐落在缅因州布伦瑞克的鲍多因（Bowdoin）学院是本州最

古老的高等教育机构，组建于1794年（那时缅因还属于麻省的一部分），1802年开学。它是享有很高声誉的学府，从那儿毕业的名人不胜枚举，如朗费罗（Henry W. Longfellow）、霍桑（Nathaniel Hawthorne）、皮尔里（Robert E. Peary）、皮尔斯（Franklin Pierce）、里德（Thomas H. Reed）和大法官福勒（Mwlville W. Fuller）。作为这样一所名校，校园也有趣地融合了现代时尚与历史沧桑。

更历经沧桑的是阿普尔顿（Appleton）宿舍大楼，细心的参观者会发现，在大楼南端入口的右边，立着一块矮小纪念碑，上面刻着简单的铭文：



不论参观者怎么猜，似乎都解释不了这块纪念碑的意思。原来，这是学校的一个传说。大概是1878年，解析几何第一次列为学校的课程。结果，这门课一点儿也不受欢迎，学期末，同学们把课本付之一炬，灰烬飘落到宿舍楼的南端。于是，他们树立一块小石碑来纪念这个事件。

我们难免惊奇，为什么解析几何那么不讨人喜欢呢？我们知道，如果课讲好了，对学基础数学的大学生来说，不论学什么科目，也不如学解析几何更刺激，它是一种有力而多能的解决几何问题的方法。数学同学第一次真正全方位地见识了数学问题的"转换-解决-还原"方法——在一个领域的难题可以灵巧地转换为另一个领域的对应问题，同学们可以轻而易举地解决它。例如，为了求得两个罗马数字LXIII和XXIV的乘积的罗马表示，我们把两个罗马数转换为对应的印度-阿拉伯数字，63和24，然后

利用我们熟悉的乘法算术，在印度－阿拉伯记号下求得两个乘积1512，然后还原到罗马记号，最后得原来问题的答案为 MDXII。通过适当转换，困难的问题可以化为简单的问题。这就是所谓解析几何的方法，它独创性地将几何问题转化为代数问题。

140° 克里论非欧几何

可爱的著名美国几何学家克里（Paul Kelly）1969 年在圣巴巴拉加州大学秋季学期实验了数学欣赏课。课程面向一般大学生，克里教授的希望是，在这门课程里把不同数学思想与学生的现实世界联系起来。例如，他认为，如果能让学生发现非欧几何可能在认识自我方面有着重要应用，该是非常有趣的。他的论点是这样的：

我们从中小学时候起就习惯了空间的欧几里得解释，对寻常问题，这个思想体系很有用——实际上，它非常令人满意，以至我们认为它是“真正的”体系，而本能地反感非欧几何。现在，每个人从父母、老师、社会和一般经验为自己汲取信仰、感情和态度，形成某种体系。在一般情形下，这样的体系是“适用的”。结果，他往往认为他的体系是“真的”，而带着怀疑甚至蔑视或否定的眼光，去看别人（如外国人或不同社会阶层的人）的与他不同的哲学、宗教或文化。于是，从情感上说，真正认识一个和自己截然不同的人，就像真正理解我们的世界可能更接近非欧几何而不是欧几里得几何。

三 角 学

141° 惊人的结果

哈里不如拉里幸运，总不能得到正确结果。他最近的一个成绩是把

$$y = \sin x / n$$

中的 n 消去，从而得到

$y = 6$ (six)。(韦恩)

142° 功能语法

在麦克柯马克（Freilich-Shanholt-McCormack）的《三角学》中，出现过“三重否定”。问题是：“三角函数中哪一个不可能是负数?”答案是：“没有一个不可能为负。”[12]（韦恩）

12 “None is never negative.”

143° 道奇的异想

在道奇(Clayton Dodge)《圆函数》第22页引进圆坐标记号的地方,有一个脚注:“因为习惯了用圆括号来表示方坐标,所以我们似乎可以同样合乎逻辑地用方括号来表示圆坐标。”(韦恩)

144° 浴室中的 π

π 的十进制展开的数字不满足任何规则，完全是随机出现的。因为这一点，在需要随机的数字序列的地方，常利用 π 的十进制展开中的连续数字。这种随机性可以用于铺瓷砖。为了打破均一颜色的单调，我们希望不时插入一些不同颜色的瓷砖。道

奇在给自己的浴室铺墙面时，就发挥了这个想法，在白色的背景下随机插入茶色瓷砖。

缅因州立大学戈尔翰（Gorham）校区的厄普顿－黑斯廷斯（Upton-Hastings）学生宿舍大楼的外墙，被瓷砖以“随机的”方式划分为不同的单元。假如有的单元用 π 的十进制展开，有的单元用 e 的十进制展开，还有用 $\sqrt{2}$、log2 甚至欧拉常数 γ 的十进制展开，那该是多么有趣呀！本卷扉页的图是用 π 的十进制展开的一个例子。

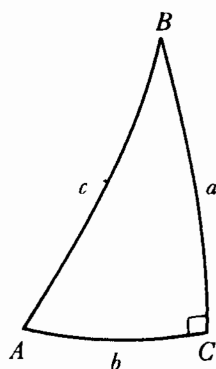
145° 最快乐的初等数学记忆秘诀

严格说来，*mnemonic* 是一个形容词，意思是“帮助记忆的”。不过它常被错误地用做名词，意思是“帮助记忆的方法或系统”。在后一种意义下，初等数学里有许多记忆“秘诀”。例如在 R41，我们考虑了记忆 π 的方法。在初等几何课上，“所有同学都学微积分”，就用来记忆：在第一象限所有三角函数都是正数，在第二象限只有正弦及其倒数（余割）是正数，在第三象限只有正切及其倒数（余切）是正数，在第四象限只有余弦及其倒数（正割）是正数。[13]

13 那句秘诀原文是“All Students Take Calculus”，4 个单词的第一个字母正好对应于“所有”和 sin，tan，cos 三个函数的第一个字母。

初等数学最美妙的记忆法则是所谓的“分圆法则”，是纳皮尔为了记忆解球面直角三角形的 10 个有用公式提出的。图 16 是以传统方式标注的球面直角三角形。三角形右边是五等分的圆，除了 C 外，字母次序与三角形的相同。字母 c，B，A 上的短线意思是“补角”（如 $\bar{B}=90°-B$）。这几个角度的量 a，b，$\bar{c}$、$\bar{A}$，$\bar{B}$ 叫“圆的部分”。在圆中，对任意给定的部分，有两个部分与它相邻，还有两个部分不与它相邻。我们称给定部分为“中间部分”，与之相邻的为“相邻部分”，不相邻的为“相对部分”。

纳皮尔法则可以陈述如下：



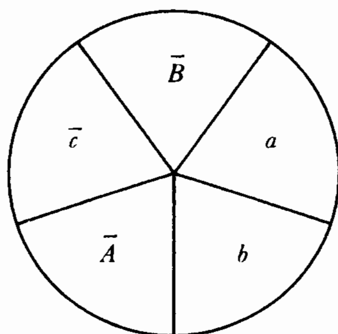


图 16

1　任意中间部分的正弦等于两个相对部分的余弦之积。

2　任意中间部分的正弦等于两个相邻部分的正切之积。

将此法则用于每个部分，就得到解球面直角三角形的 10 个公式。

146° 三角知识

沃什(J. L. Walsh)评论傅里叶级数的费叶(Fejer)定理说，费叶能为三角级数做出如此重大的贡献，是因为他非常熟悉三角学。我想推广这个判断说，狄利克雷能证明傅里叶级数收敛的一些定理，是因为他懂得更多的三角学。(鲍斯)

概率与统计

147° 重要的数字

一个巡回演讲者开始了他最得意的演讲：“一百万年前，恐

龙横行大地。”立刻被听众中的一个好心的老太太打断了，她说，“您说的是一百万零八年，是吗?”

“您为什么那么说呢?”演讲者问。

“因为我八年前听过您同样的演讲。”老太太说。

148° 吹木管的狒狒

从前有只小狒狒，
气喘吁吁爱把木管吹。
　　它说，“或许
　　　　十亿年后
　　　　我定能找出美妙的旋律。”（爱丁顿）

149° 惊人的概率

一个老师讨论概率，证明某个事件必然发生的概率一定等于1。接着他强调说，“那事件不会发生的概率是0!”（0! =1。）（Verner E. Hoggatt, Jr.）

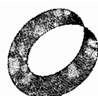
150° 不大可能

新妈妈骄傲地把她的双胞胎抱给朋友看。“你知道吗?”她吹嘘说，“要860胎才出现一个双胞胎呢!”

“是吗?”朋友说，“我真奇怪你哪有那么多时间呀!”（韦恩）

151° 选择，不是机会

一个德国统计学教授向面包师抱怨，他每天买的面包都比规定的重量轻。从那以后，教授通过称量发现，他买的面包要么和规定的重量相等，要么比它更重。一个月后，教授向警察告发了



面包师，说他故意短斤少两坑害顾客。“因为我没得到重量的正态分布，”他说，“显然我得到的是分布的较重的‘尾巴’，因此其他的人几乎都被坑了。”（韦恩）

152° 公平

学生扔硬币之前说，“如果正面朝上，我就去看电影；如果反面朝上，我就去喝咖啡；如果立着不倒，我就去上学。”

153° 可能的必然

笛卡儿在《方法论》中说，“当我们无法决定什么是真的，就应该遵从那最可能的，这一点千真万确。”

154° 习惯事件的真理

传统是判断、信仰、传说、习俗等通过语言或实践一代代传承下来的。现在，随着时间的流逝，人们对仅凭传统支持的那些旧俗越来越淡漠了，而在努力创建更适当的法则。对这个问题最有名的解决方法也许来自克莱格（Craig）在1699年发表的《基督神学的数学原理》（*Theologiae Christianae Principia Mathematica*）。他认为，对传统事件的信心与自传统诞生以来的时间的平方成反比。根据这个原则，对那些福音书，假如是口头流传的，其信心大约在公元880年就丧失殆尽了；假如是文字记录的，则信心可能会延续到3150年。彼德森（Peterson）利用不同的衰减法则，得出信心大概在1789年消失。

德摩根在《悖论集》里引用了剑桥东方学者李萨穆（Samuel Lee）的话，大概意思说，在回应关于朝鲜没有基督圣迹留下的证据的议论时，伊斯兰作家主张，随着对基督圣迹的信仰的日

益淡漠，信心最终将无力捍卫那些圣迹的存在。接着，他们需要寻求别的先知和奇迹。

每个依赖于传统的宗教最后都将消亡。

155° 似是而非的统计

统计结果表明，我们的主干道路越修越宽，但同时交通事故越来越多。显然，宽阔的道路（也许因为它导致人们开车更快）是事故的原因。

156° 统计预言

新汽车将达 600 万辆。

157° 决心

统计表明我们的汽车在路上每天撞死 100 人。让我们下决心做得更好。

158° 沃尔沃

“过去 11 年登记的沃尔沃汽车中，有十分之九还在运行。”（过去 10 年在这儿登记的沃尔沃汽车，十一分之九可能是在过去 4 年登记的！）（Claire Rubin）

159° 分类

有说谎者，有该死的说谎者，还有统计学家。

160° 列车上的统计学

一个乘客问卧铺车厢的行李员：“你平均从客人那儿拿多少

小费?"

"5 美元，先生。"行李员回答。

乘客给了他 5 美元。

"先生，"行李员惊呼："你可是我遇见的最'平均的'客人了!"（韦恩）

161° 枚举

枚举问题存在着一大危险，就是重复计算。例如，我们考虑下面的问题："一只牛有多少条腿?"

"哦，让我想想。前面有两条，后面有两条，每个侧面还有两条——噢，对了，每个角还各有一条。一共是 12 条，先生。"

"那么牛的前腿呢?"

162° 外推

机动车管理局的一项调查表明，1940 年每辆小汽车平均载人 3.2 个。1950 年，降至每车 2.1 人。到 1960 年，平均数降至 1.4 人。如果把这个统计结果外推到 1980 年，那么每 3 辆运行的车里就有一辆是无人的。

逻　　辑

163° 悖论

最大的悖论也许就是数学中存在着悖论。

164° 逻辑的自相矛盾

在逻辑课上讨论古老的 Eubulides 和 Epimenides 悖论时,[14]不妨讲讲那位意大利裁缝的故事。一个小伙子不小心撕破了他的外衣口袋。他把衣服拿给裁缝,问能否补好。裁缝看了看,回答说,"Euripides, Imenides."

14 伊壁尼德斯(公元前 600 年)的悖论是:所有克里特岛人都是说谎者——一个克里特岛人说;欧布里德斯(公元前 400 年)悖论:这句话是假的。

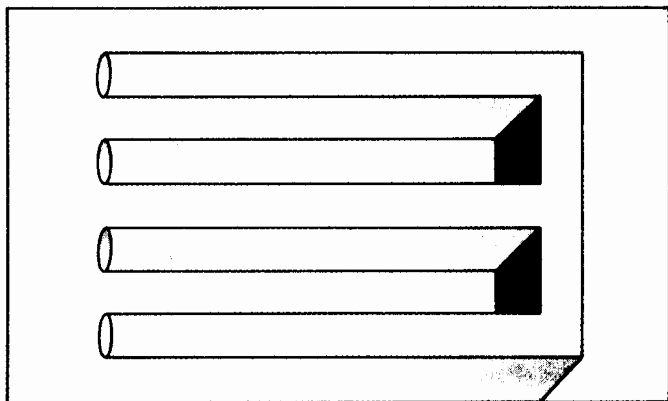


图 17

165° 逻辑

~~所有的事情都不像它表面那样。~~

~~没有什么事情像它表面那样。~~

~~没有什么事情像它本来那样。~~

~~每件事情都不像它本来那样。~~

~~每件事情都不像它表面那样。~~

~~并非所有事情都像它表面那样。~~

有些事情不像它表面那样。[15]

15 Clayton W. Dodge, 《数与数学》, *Numbers & Mathematatis*, Prindle, Weber & Schmidt, Inc. ,1969. (原注)

166° 不逻辑的逻辑

如果世界有个地方，本来是地平线升起，他们每个人却说太阳落山了，你打算怎么给他们讲逻辑呢？（Cal Craig）

167° 逻辑的证明

我们回想一下《罗宾汉》（*Robin Hood*）里的“逻辑证明”（第 14 章，“罗宾遭遇修道士塔克”）：每条河都只有一个河岸：

“那么，好伙计，神父，不管你是什么人，”罗宾说，“我想知道，那位修道士是住在河的这边还是另一边呢？”

“当然，这条河只有另一边。”修道士说。

“你怎么证明呢？”罗宾问。

“是这样的，”修道士一边说，一边看着他的指尖。“河的另一边就是另一边，对吗？”

“是的，是那样的。”

“然而另一边也不过是一边，你明白吗？”

“都是那么说的。”罗宾说。

“于是，假如另一边是一边，这边就是另一边。但这个另一边是另一边；因此，河的两边都是另一边，正是我刚才说的。”

“真是绝妙的论证。”罗宾说。“可我还不明白我要找的那个修道士是在我们站的这边呢，抑或在我们没站的一边？”

“那，”修道士说，“那可是这个论证无法回答的问题。我建议你凭自己的感觉，凭你的视觉或触觉之类的东西去找吧。”（Maurice Lapman，*Robin Hood*，Globe Book Company，1952）

168° 无效证明

有个著名的小问题是这样说的："几个冒险者搭好营帐，出发去猎熊。他们朝南走了 15 里，然后朝东走了 15 里，在那儿打了一只熊。然后，他们朝北走 15 里，回到营地。那么熊是什么颜色的呢?"

答案是"白色"，理由如下。为了朝南 15 里、朝东 15 里，然后朝北 15 里回到出发点，起点必然是北极点。北极区域的任何熊都是北极熊，而北极熊是白色的。

尽管以上的答案可能是对的，推理却不完整。因为地球上还有其他地方也存在上面描述的那种旅行路线。例如，我们考虑南方的一个周长为 15 里的小纬线圈以北 15 里的任意一点。从那点出发，朝南 15 里就到达纬线圈，再东走 15 里，即绕纬线圈一

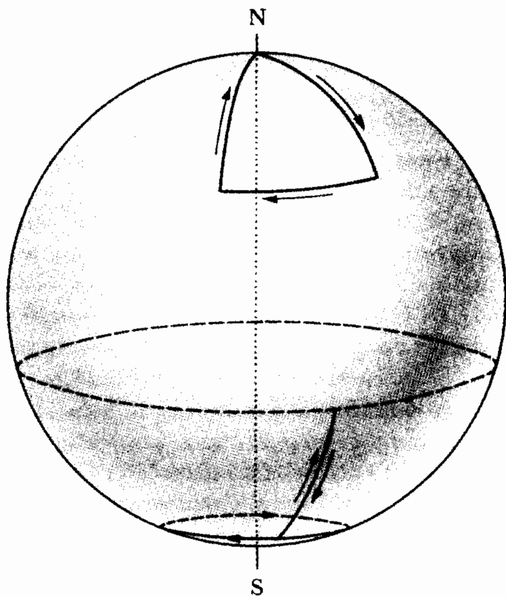


图 18

周，然后朝北 15 里就回到了起点。我们也可以从周长 7.5 里（或者更一般地，从任何周长为 15/n 里，这里 n 为任意正整数）的小纬线圈以北 15 里的一点出发。这些不同的起点本身处在一定的纬线圈（如图 18）。于是，可能起点的轨迹包括北极点和接近南极的无限多个小纬线圈的集合。但南极点附近没有熊。所以，猎熊者一定是从北极点出发的，熊的颜色是白的。

169° 林肯如何提高逻辑能力？

“他做国会议员时学习并几乎掌握了 6 卷欧几里得的书。

“他开始了严格的智力训练，目的是提高他的能力，特别是语言和逻辑的力量。于是他喜欢欧几里得，不论走到哪儿，都把书随身带着，最终能毫不费力地证明 6 卷书里的每一个命题。他常在枕边点着蜡烛，攻读到深夜，而同屋的几个律师伙伴们，已经鼾声如雷了。”[16]

16 林肯《自传》，1860。（原注）

170° 罗素“证明”他是教皇

假如接受了任何一个逻辑错误的陈述，那我们就能证明任何一个别的陈述，这是形式逻辑里通常坚持的一个原则。多年前，罗素在纽约城市学院教逻辑，一天在课堂上讲了这个原则，遭到了学生的挑战。

“好啊，”学生说，“假定 1 + 1 = 1，证明你是教皇。”

据说罗素毫不犹豫就回答了。“我是 1，教皇是 1，如果把我们放在一起考虑，我们是 1 + 1——等于 1，所以我们是同一个人，我就是教皇。”传说，他说这话时眼睛里闪着光芒。

拓　扑　学

171° 双侧曲面与单侧曲面

圆盘是边缘没有节点的双侧曲面，牟比乌斯带是边缘有节点的单侧曲面。在寻常的三维空间里，是不是存在含有一个打结边缘的双侧和单侧曲面呢？答案是肯定的。图 19 画了一个双侧曲面的例子（弗兰克尔（F. Frankl）和庞特里亚金（L. S. Pontryagin）在 1930 年发现的），图 20 是单侧曲面的例子。

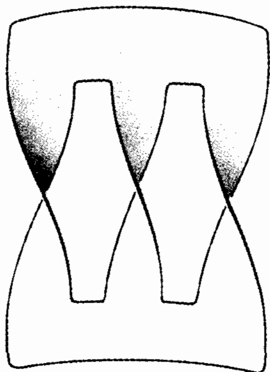


图 19

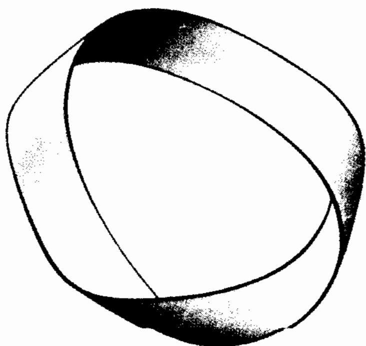


图 20

感兴趣的读者也许可以试试在普通三维空间里构造两个边缘的双侧曲面和两个边缘的单侧曲面，而且

1）两个边缘没有节点也不相连；

2）两个边缘没有节点但相连；

3）两个边缘有节点但不相连；

4）两个边缘有节点且相连；

5）一个边缘有节点，一个边缘没有节点，两个边缘不相连；

6）一个边缘有节点，一个边缘没有节点，两个边缘相连。

答案可以看加德纳（Gardner）的《科学美国人数学疑难和娱乐》（Simon and Schuster，1959，63～72页。）

172° 牟比乌斯带

一个数学家泄露了秘密
牟比乌斯带只有一个边界。
　　你把它从中央剪开，
　　会得到好大的乐趣，
因为它分开了还在一起。

173° 脱衣舞者

一个可爱的舞娘，
名叫弗吉尼娅，翩然脱下霓裳。
　　她读过科学幻想，
　　因瘦身而夭亡，
只为了牟比乌斯带子长。（Gyril Kornbluth）

174° 只有一岸的河流

假如大陆表面具有牟比乌斯带的形状，一条河流穿过它的中线，我们就能从河流的一岸走到对岸，而不必涉水渡河。就是说，河只有一岸。（参见168。）

175° 巫师

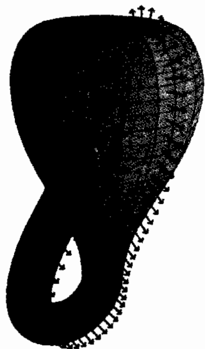
一对对青年来问巫师他们能否结婚。如果巫师想说他们的婚

姻不会长久，就撕开一个没有扭曲的带子；如果他想说尽管两人会吵闹但婚姻还能维持，就撕开完全扭曲的带子；如果他想预言婚姻美满幸福，就撕开牟比乌斯带。想想这巫师用了什么智慧。

176° 沮丧的画家

想想看，让两个画家在牟比乌斯带的两边，一个画白的，一个画黑的，结果怎样呢？

177° 克莱因瓶


克莱因瓶

一个数学家名叫克莱因，
把牟比乌斯带奉为神灵。
他说，“如果黏结
两个带子的边缘
你会得到一个怪异的瓶子，就像我的一般。”

178° 校园的茫然

弗吉尼亚大学的一个数学教授到毗邻的女子学院去讲“凸集与不等式”，惊讶地发现大厅里座无虚席。看一眼学校的报纸，他才明白是怎么回事。原来他的演讲题目成了“犯罪、性和不平等”。[17]（Karl B. Knust, Jr.）

17 原来的演讲题目是“Convex Sets and Inequalities”，被错写成了“Convicts, Sex and Inequalities”。“不等式”与“不平等”是同一个词。

179° 约当定理

几百年来，几何学家们凭直觉接受了一个显然的事实：平面 p 内的简单闭曲线 C 将 p 的其余部分分为两个集合，同一集合内的任意两点可以用 p 内的多边形路径来连接，而不与 C 相交；不同集合的两点则不能那样连接。如果 C 是圆或平面凸多边形，

这个事实当然是显而易见的。但图 21 和 22 说明对更复杂的简单闭合平面曲线来说，事情就不那么一目了然，而且还可以画出比它们更复杂的闭合曲线来。

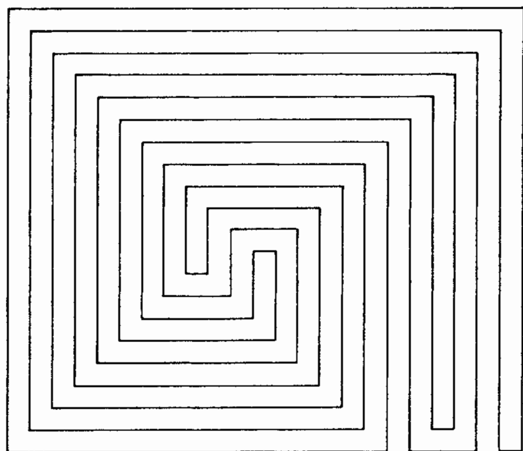


图 21

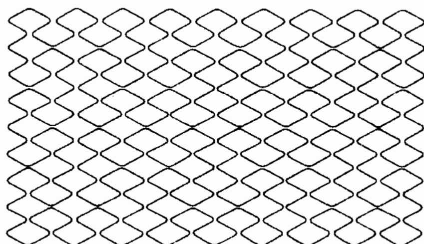


图 22

直到 19 世纪后半叶，才有人想到有必要证明这个事实。令人惊讶的是，证明并不容易，数学家困惑了很多年。第一个成功证明是数学家约当（Camille Jordan）在他著名的《分析教程》（*Cours d'analyse*）里提出的，赢得了以他名字命名的定理。尽管今天有很多证明，而且最近的一些证明远比约当原来的证明简洁，但还是太复杂了。如果仅限于平面闭合多边形曲线，问题要相对容易一些。

分辨简单平面闭合曲线的“内”和“外”的问题，令我们想起一个醉鬼的故事。有一天，一个醉鬼绕着大楼的石柱转了一圈又一圈，独自抱怨着。一个过路人问他为何伤悲，他回答，“看呐，我被捆在墙里了。”

180° 新教徒曲线

18 相交和“十字架”都是“cross”。

约当曲线是不与自己相交的平面曲线。缅因州立大学斯温福德（Lee Swinford）教授称这种曲线为“新教徒曲线”，因为“它们自己不带十字架”。[18]

第三象限

从小达罗的漫画
到一个完人

漫画新数学

一个二年级老师承认，尽管教小孩儿既麻烦又痛苦，但多少也能得到一些回报，那就是课堂上看到的或者家长报告的发生在家里的笑话。“新数学”似乎带来了很多这样的快乐瞬间。

181° 小达罗的漫画

小达罗（Whitney Darrow，Jr）的一幅漫画描绘了一个家庭场景：父亲、母亲和小儿子坐在餐桌前。困惑的父亲要儿子解释他听得耳朵都起茧子了的“新数学”，小孩儿告诉他，“爸爸，你是不能指望靠餐桌前的简单几句话来学会新数学的基础的。”



“Dad, you can't expect to pick up the basics of the new math in a simple dinner-table conversation.”

Whitney Darrow, Jr 的漫画（*The New Yorker* April 17, 1965）

182° 杜恩（Alan Dunn）的漫画

焦头烂额的父亲恼怒地坐在桌前，面前堆着厚厚的一叠计算稿纸，他正在算该交多少个人所得税。小女儿走进来，拿着一套税单说："爸爸，这一套（set）就等于您的收入；您的花销是其中的子集（subset）。那个子集的子集就是您扣除的部分。"

183° 新数学"后事"

教学经验证明，应该在我们的初等学校大纲里加入许多所谓"新数学"的内容，但也要注意不能太过分了。我们看看两个小孩儿给盐下的定义：（1）所谓盐就是一杯倒进汤里就把汤糟蹋了的东西；（2）所谓盐就是汤缺了它就被糟蹋了的东西。

184° 调色板

安妮（Anne）去年读一年级了，回到家来逢人就讲"新数学"。她带回不同大小的彩色木块，怀着极大的兴趣玩儿她的数学。红色木块比白色的长 1 倍，绿色的长 2 倍，紫色的长 3 倍，等等。问她二加三等于几，她回答，"二加三等于黄。"

185° 可乐的谬误

美国幽默协会会长刘易斯（George Q. Lewis）曾定义"boner"为"带来可笑后果的突然发生的显著过失"，而"blooper"为"特大的 boner"。四分之一世纪以来，"美国纠谬协会"——"一群以傻为乐的家伙"——一直在向美国机智与幽默图书馆提交大大小小的谬误。现在，图书馆有了 10000 多个条目，由馆长（Leopold Fechrner）编在不同的主题下。那些谬误还继续在我们

国家的数学课堂上发生，也通过老师在数学圈子里流传。下面是常见的一些例子。几乎每个数学老师都容易添加一些他在自己的课堂上经历的东西。[1]

1 三角学就是一个男人同时娶了三个老婆。
2 代数是算术的古老形式。
3 几何教人们如何区别男女天使。
4 七条边的多边形叫小阿飞。
5 当你不知所云时，就用代数符号。
6 圆就是没完没了地与自己的末端相遇。
7 圆周绕在它想进去的圆外。
8 正方形是带角的圆。
9 矩形是肥胖的正方形。
10 垂直与水平一样，只是正好相反。
11 阿拉伯人给了我们一个愚笨的系统，我们至今还用它来计数。
12 埃及金字塔是照三角锥的形式造的。
13 无限是我们不可达到的直线交会的地方。
14 地球是圆的，但在角上是平直的。
15 我们多数地毯的中心是波斯。
16 一个“平均的”人就是不比任何人老的人。
17 实践我们的信誉计划——100%付现金，每月不欠一分钱！
18 赤道是绕着地球奔跑的动物园的狮子。
19 上个月患了算术病的Sam Smith，星期天可以走出家门了。

1 这25条误会都是英文的文字游戏。例如，第3句 Geometry teaches us how to bisex angels，本意是“几何教我们如何平分角（bisect angles）”；第21句 Scotland Yard measures two feet and ten inches 本来说苏格兰“码”等于34英寸，而 Scotland Yard 也是伦敦警察总部。《回归数学圈》还有很多这样的文字游戏。

20　听造监狱的建筑师抱怨说，牢房的墙没按尺寸做。

21　苏格兰场长两英尺宽十英寸。

22　据人口调查局的最新报告，“平均的”美国人正在变老。

23　地球每 24 小时下一次决心。

24　船穿过 18 度经线时，星期六变成星期天。

25　在同一高度相遇的两架飞机有着共同的目的地。

课堂的机智与滑稽

有时做老师的必须狡猾一点儿。

186° 一句透话

一天，一个访问者来到韦恩的数学课堂，看见同学们正站在黑板前解简单的应用题。“你们在做什么？”来客问。“我在打穿混凝土呢。”韦恩回答。

187° 空肚皮

一个同学想找借口不做题，告诉老师说他饿了，空肚皮做数学题行吗？“当然可以啊，”老师回答说，“不过最好还是用纸来做。”

188° 喷嚏

一个同学在数学课上大打喷嚏，老师立刻停下来，顺便说，“喷嚏是一种自然反应，思想过于深刻的思想者可以借此通过鼻子排除浅薄的思想。”——此话见于艾伦坡的《发现》(*Eureka*)。

189° “点到即止”

一个学数学的同学在课堂上提了一个十分愚蠢的问题。老师不想打击他的积极性，但又不愿说假话，就直视那同学的头顶，说，“你知道，你问到点子上了。”

190° 考前忠告

同一节线段两个点，
想在一端，坐在另一端；
成功就等我们选：
头是胜利，尾是失败。

191° 小心读题

数学老师常在课堂上向同学强调，读题时要小心，弄清问题已知什么，还需要什么。这样的教训可以通过下面的问题来说明：“我们看一个普通的 8×8 象棋棋盘，左上角有一个‘车’。问题是要移动这枚棋子，通过车的行走，[2]使它进入棋盘的每一格，进入一次且只能一次，最后到达右下角的那一格。”

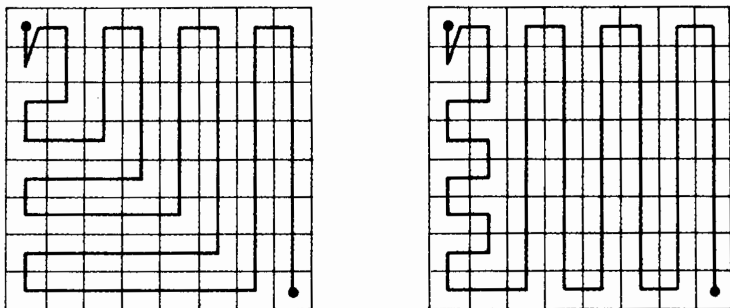
2 国际象棋的车只能沿棋盘的纵横方向行走。

等同学们试验失败之后，老师可以提出如图 23 的解法，向他们指出，读题时要小心。因为车已经给定在左上格，我们还需要使它进入那一格，而问题是要让它进入棋盘的每一格一次且只能一次。

也有适合初级学校的类似的不过更简单的问题：

1）我有两枚硬币，一共 60 分。其中一枚硬币不是一角的，那该是两个什么硬币？

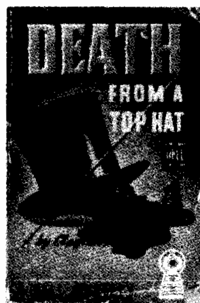
2）一个农夫在一块田里有三堆干草，在另一块田里有四堆


图 23

干草。如果把所有干草堆在一起，他将有几堆呢？

3）一磅铁和一磅羽毛，哪个重？

4）2 英尺宽、3 英尺长、4 英尺深的洞穴里有多少泥土？



1938 年 Dell 版封面

192° 误导

在克雷顿·劳森（Clayton Rawson）的《死于大礼帽》（*Death from a Top Hat*）中，魔术师梅林尼（Merlini）告诉警察，魔术师是如何把观众的注意力引到他的右手从而忽略他左手的动作。他画了一张图（图 24），"*X* 是圆心，*BC* 等于 9.5 英寸，*BA*

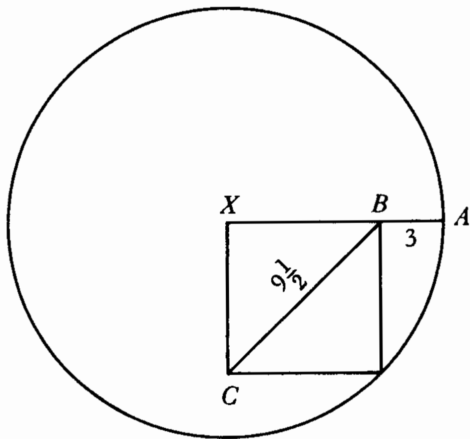


图 24

等于 3 英寸。请问，圆的直径是多少——不要计算?”

193° 意大利式的论证

在一次数学会议上，麻省理工学院（MIT）的罗塔（Giant-Carlo Rota）教授为了节省时间，避免冗长琐碎的说明，就通过挥动手臂来论证。最后，他向大家道歉他采用了“意大利式的论证”。

194° “覆盖”

怀特海曾说，教师的职责不是覆盖（cover）整个学科，而是把它向学生打开（uncover）。

一门数学课结束时，一个同学走向老师（我们不提他的名字），说，“教授，我想说说您把这门课覆盖得很好。课堂里没覆盖的那些东西，期末考试都覆盖了。”（韦恩）

195° 看?

学生要讲师解释一个问题，他在黑板前站了一会儿，然后写出答案。“可我还没明白。”同学抱怨说。老师把黑板擦了，又站了一会儿，然后仔细把结果写了一遍。“不，我还是不懂。”同学坚持。这次，老师把问题写出来，面对它站了好长一会儿。最后，他又写出答案。同学还是摇头。“可我已经用三种不同的方法为你解决了!”老师吼道。（比较《走进数学圈》故事 360。）（韦恩）

196° 数学高级中学

卡洛尔（Lewis Carroll）在一封信里提过某些建议，也许可

以借鉴来规划一所进行初等数学教育的学校。信见于怀特（W. F. White）的《初等数学拾零》（*A Scrap-Book of Elementary Mathematics*, Open Court 出版公司，1942，第 4 版，201 和 202 页）。佩诺布斯科特河上的斯特拉特福的 CHED 研究了如何扩大和改进这种计划的学校。下面是最后的一些结果，也许还有一定作用。

学校建筑是带地下室的只有一层的平房，正规的运动场（如图 25），配以下面的设施：

一层

A. 一间用于计算最大公因子的大教室。

B. 一间相邻的配有精细工具的小教室，可以计算最小公倍数。

C. 一间有投影仪的暗房，可以重复播放循环小数。

D. 一间配备了精密工具和天平的教室，用以分解整数。

E. 一间附属的尖而细长的教室，用来计算几何级数之和，写无穷小数展开，求无穷数列极限。

F. 一间附属的不规则教室，用来学习不等式。

地下室

G. 一间可以保存无理数的软墙隔音教室。

H. 一间装有绳索、铁链和三角架的教室，用来将小数约减到最小的位数。

I. H 周围的小教室，存放被减出的小数。

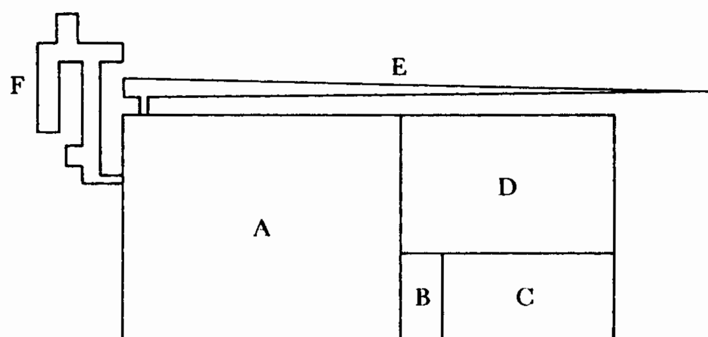
二层

J. 学校建筑只有一楼，二楼预留来研究虚数。

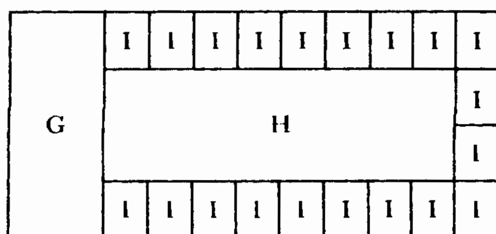
运动场

K. 一大片露天运动场，同学们下午可以带着铁锹和铲子来

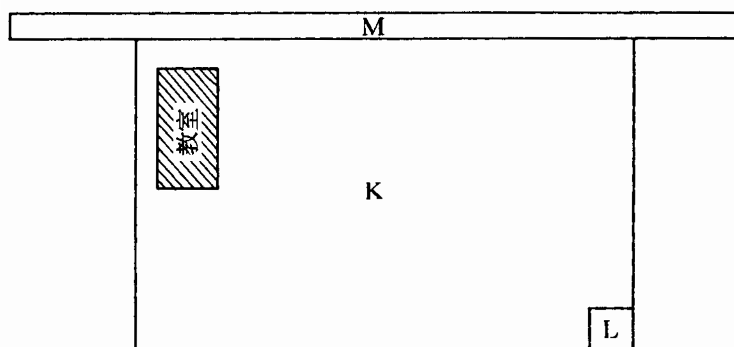




一层



地下室



运动场

图 25

练习开方求根。

L. 篱笆包围的小运动场，储藏平方根，以免其尖角损害其他的根。

M. 一个仔细平整的狭长地带，用以检验平行线是否相交，因此，这块场地可以延伸“很远很远”。

197° 多重打击[3]

大学教授是我的牧者，我一无所有；
他不让我躺在租借的床上；
他用考题使我变得精神错乱；
他动摇了我获取大学文凭的决心；
他使我在同学面前大出洋相；
是啊，尽管我深夜点灯到房东怒吼，我还是怕被伤害，
因为他不和我同在。
他的策略，他的理论，他的咆哮，吓跑了我的智慧。
他在我的敌人面前给我布置额外的功课；
他用红色的铅笔勾画我的考卷，
圆圈画满了整整一行。
当然，理论、考试和论文整日伴随着我的大学生活，
我将在这疯人院一样的地方直到永远。

198° 口试程序

我们在大学教书的人，大概都见过，在数学硕士或博士学位口试过程中，有多少无耻的虐待学生的行为。这样的考试，常常成为教授团或什么答辩组织的某些成员的炫耀，而倒霉的却是那些学位的候选者。我记得在一次口试中，有个教授为他自以为是

3 这篇歪诗原题 *Twenty-third Slam*，是“篡改”了《圣经·诗篇 23》（*twenty-third psalm*）。经文是：

耶和华是我的牧者。我必不至缺乏。

他使我躺卧在青草地上，领我在可安歇的水边。

他使我的灵魂苏醒，为自己的名引导我走义路。

我虽然行过死荫的幽谷，也不怕遭害。因为你与我同在。

你的杖，你的竿，都安慰我。

在我敌人面前，你为我摆设筵席。

你用油膏了我的头，使我的福杯满溢。

我一生一世必有恩惠慈爱随着我。

我且要住在耶和华的殿中，直到永远。

的辉煌夸耀了一个多小时。还有一次，可怜的同学被请到门外等候导师们讨论他的糟糕的表现，而房间里的导师们却没完没了地玩儿起了扑克牌。

针对这样的程序，梅森（S. J. Mason）在几年前发布了如下规则来以指导数学中的口试。

> 口试的目的很单纯。在这些短简中，我提出几个目标和施行口试的几个实用准则。为了确保考试真正成功，必须注意这些准则。从每一个主考人的立场看，口试的目的应该是
>
> （A）让主考人显得比（a）考试者或（b）其他主考人更聪明和机智，从而坚守他的自尊。
>
> （B）压倒考试者，从而免得在考试过后浪费时间去做评判。
>
> 以上两个目的可以通过扎扎实实地发挥以下屡试不爽的法则来实现：
>
> 1. 考试开始之前，让考试者明白他的整个职业生涯就靠他的表现；强调考试的重要和正式。从一开始就将他置于一个严峻的位置。
>
> 2. 首先抛出你最难的问题。（这一点很重要。如果第一个问题足够困难或涉及面足够广，他就会不知所措，后面的问题再简单也回答不上来。）
>
> 3. 与考试者谈话要冷峻、严肃，相反，对其他主考人则轻松友好。一个特别有效的策略是对别的主考人就考试者的表现发表幽默的评论，这样就能把考试者孤立出来，排除在外（尽管他本人并不在场）。
>
> 4. 让他以你的方式做，特别当你的方式与众不同的时

候；约束他，给每个问题强加限制和要求。要点是把简单的问题复杂化。

5. 逼他犯简单的错误，然后尽可能使他为它长久困惑。等他刚发现错误却还没来得及解释时，你自己高傲地纠正它。这需要恰当把握感觉和时机，经过一定实践之后才好运用。

6. 发现他陷入困境时，不要引导他出来，而是表示遗憾，然后改换新的题目。

7. 问一些附带的问题，如“你在大学微积分里学过它吗?”

8. 不许他要求你澄清问题。不要重复或阐明你自己对问题的陈述。告诉他不要说怎么想的，你只需要他的答案。

9. 每过几分钟就问他是不是紧张。

10. 安排好你和其他主考人的位置，使他不能同时面对你们大家。这样你可以对他进行某种交叉进攻。等他转向其他人时，你又问他一个正面的小问题。几个主考人协调一致，很容易把考试者弄得晕头转向。这和前面第2条的效果相似。

11. 带墨镜，你显得高深莫测，就会使他惊惶失措。

12. 最后告诉考试者，“别给我打电话，我会给你电话。”

数学家与数学

199° 摩尔说理论

摩尔（E. H. Moore）教授在1906年的演讲中说：

“我们以抽象确立一般化的基本原理：

五花八门的理论的中心特征之间的相似的存在，意味着存在一个普遍的理论，是那些特殊理论的基础，并将其统一于那些中心特征……”

200° 摩尔说严密

关于数学课程应该多严密，摩尔教授评论道，“直到我们可以说，从今天起，它就严密了。”[4]

4 “sufficient unto the day is the rigor thereof.”

201° 严密与僵尸

有人说，数学课太严密（rigor）了，学生里出了好多僵尸（*rigor mortis*）。

202° 高斯的第二个座右铭

高斯为自己选择的第二个座右铭是《李尔王》中的一句话[5]：

自然啊，你是我的女神；

我是你法则的仆人。

5 高斯的第一个座右铭是：*Pauca sed matura*（少，但熟了）。见《走进数学圈》故事326。

于是，高斯相信数学应该向真实的世界寻求灵感。正如华兹华斯（Wordsworth）说的，“智慧常常在我们站立时比高飞时更近。”

203° 现代数学与古老习俗

现代数学与古老习俗有着惊人的相似。在旧风俗里，人们面对代表某个事物的东西，就像面对那事物本身。例如，钉敌人的图像，把它肢解，把它撕碎，相信这就是在消灭敌人。在现代数学里，我们以符号代表事物，我们摆弄符号时，就感觉在应对事物本身。

204° 数学家的祈祷

如果让数学家祈祷，那他大概会这样说：“哦，上帝，请再让我做出一个有趣的发现吧！”

205° 数学家的头脑

下面的故事几年前曾在许多数学会议上流行。

有个外科医生发现如何去除患者的大脑，换成他喜欢的任何大脑。当然，不同类型的大脑所需的费用是不同的。

一天，一个病人来见医生，说他想换大脑。“好的，”医生说，“你想要什么类型的？它们的价格可不一样。比如，律师的大脑是 10 美元一盎司，法官的大脑是 50 美元一盎司，等等。”

“哦，我不要那些类型的，”病人说，“我想要大学教授的。”

“啊呀，那可就贵了。”医生回答，“大学英语教授的大脑是 100 000 美元一盎司，历史教授的大脑是 200 000 美元一盎司，你想要什么教授的呢？”

“我想要数学教授的大脑。”病人决定说。

“那你真的要花大钱了，”医生说，“那可是最贵的大脑，1 000 000 美元一盎司呢。”

“我不信，”病人回答，“它们怎么那么贵呢？律师才 10 美元一盎司，法官才 20 美元一盎司，凭什么大学数学教授的大脑要 1 000 000 美元一盎司？”

“啊，我想你会明白的，”医生说，“想想看，要多少数学家才能得到一盎司的大脑呀！”

206° 解题的技术

解题时需要把更多的水管靠近火堆。

207° 解题的美学

解题时不要拿重炮来轰击小碉堡。换个比喻说，应该用小铁锤来钉图钉。

208° 应该记住

并不是所有数学家都是数学教授，也不是所有数学教授都是数学家。

209° 西方数学的公正评说

个人间的忌妒、国家间的警惕和种族间的狂热，经常破坏数学发现和发明的历史。关于这一点，贝尔（E. T. Bell）写道，“要公正评说西方数学，包括对个人和对各民族在那复杂的发展过程中的贡献的奖赏，只能由某个中国的历史学家来写。只有他具备必要的耐心，以超脱的愤世嫉俗的态度，解开那些奇怪歪曲

的模式，发现在我们西方人的天花乱坠的夸耀背后到底隐藏着怎样的真相。”

210° 数学的历史性瞬间

下面是怀特海《数学引论》(1911) 里的一段话：

> 当哥伦布 (Columbus) 第一次看到西海岸，皮萨罗 (Pizarro) 开始大西洋远航，富兰克林从风筝线感觉电流，伽利略第一次把望远镜对着天空——在这些历险和发现的历史性瞬间，人们不可能不感到激动和震撼。这样的瞬间也在抽象思想领域的学生，而其中的颠峰时刻应该是笛卡儿躺在床上发明坐标几何的那个早晨。

211° 发现的原则

在数学和科学的发现与进步中，有一个重要的原则，即对某些传统信念提出构造性的怀疑。有人问爱因斯坦如何发明了相对论，他回答，“挑战一个公理。”罗巴切夫斯基 (Lobachevski) 和博莱 (Bolyai) 挑战了欧几里得的平行公理；哈米尔顿和凯莱挑战了乘法可对易的公理；卢卡西维奇 (Lukasiewicz) 和波斯特 (Post) 挑战了亚里士多德的排中律。[6] 同样，在科学领域，哥白尼挑战了地球是太阳系中心的学说，伽利略挑战了重物体比轻物体下落快的常识，爱因斯坦挑战了两个时刻总有一个超前另一个的观点。构造性挑战的方法，成为数学进步的普遍方法，无疑是康托(George Cantor)那句名言的精髓：“数学的本质在于自由。”

当然，怀疑或挑战必须是构造性的。就是说，被怀疑或被挑战的学说不是被简单地抛弃，还要构造另一个理论来取代它，产

6 排中律的意思是一个命题要么真 (1) 要么假 (0)，这是双值逻辑。波兰数学家卢卡西维奇在 1920 年建立了三值逻辑，波斯特在 1921 年建立了任意有限多值的逻辑。

生新的结果。

212° “数学密度”

据报道，自1960年以来，匈牙利的数学家人口比例超过了世界任何其他国家。

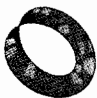
213° 达朗贝尔谈数学

达朗贝尔对数学的最敏锐评说也许是下面的话：“我毫不怀疑，假如人们生活隔绝，在此状态下还能从事任何事情，那么他们会更喜欢抽象科学的研究，而不是享乐令人愉悦的艺术。艺术的卓绝主要是为了他人，而抽象科学的研究才是为了自己。在荒岛上，我想诗人几乎不可能还那么高傲，而数学家却能依旧享受发现的乐趣。”（关于数学家和荒岛，见故事128。）

214° 斯特瓦特谈数学

苏格兰哲学家杜加德·斯特瓦特（Dugald Stewart）是爱丁堡大学数学教授马太（Matthew Stewart）的儿子。1772年，父亲因病不能讲课了，杜加德就替他在爱丁堡讲数学。三年后，他和父亲共享教授职位。1785年，他被聘为道德哲学教授。杜加德是天才的演说家，他的演讲广受欢迎。在《人类精神哲学本原》（*Elements of the Philosophy of Human Mind*，1792～1827）中，他对数学发表了下面的评论，多少有点儿像上面那段达朗贝尔的话：

> 一心为着他人快乐的人，不论靠个人表演的演员或小丑，还是专门为了愉悦而写作的作家，在某种程度上，全靠了他们的幻想和幽默。形形色色的人物的趣味，更多表现在



对欣赏对象的评判，而不在他们推想的结论。于是，数学家会满怀信心地向大众公开一个几何证明，哲学家会公开一个抽象推理的过程，而诗人哪怕只是在与某个朋友交流他的成果时，也不会感觉那样的自信。

215° 希尔谈数学

现在该引一段希尔（Thomas Hill）谈数学的话了。希尔曾经是哈佛学院的院长，他的数学名声主要来自内禀坐标的研究。

> 在数学家的伟大事业的秘密中，有着某种崇高的东西。它没有赢得大众的掌声，当代和后代的人们也不会理解它。几何学家只能由他的同行来判断，而真当得起几何学家或分析学家称号的人，通常会发现他不可能找到十二个活着的同行来组成一个陪审团。阿基米德遥遥领先于他的竞争者，千年之后才有人来评判他的工作，才能说清他到底走了多远。为了评判能与他齐名的那些人物——伽罗瓦、笛卡儿、莱布尼茨、牛顿以及莱布尼茨和牛顿的微积分造就的数学家们——我们不得不借助他们相互的证言；他们距离我们太远，我们不可能评判他们。

216° 数学家和他的方法

玻尔兹曼（Ludwig Boltzmann）曾说，解析几何看来几乎总是比它的发明者更精巧。在实践中见识高度灵巧的数学方法，就会产生这样的感觉。类似的关于形式主义者和他的铅笔的故事，见《走进数学圈》251。

217° 研究者和老师

几个创新的数学家和一个数学老师在一起午餐，一个创造者问："假如我们学阿基米德，每人要把自己最骄傲的成就铭刻在墓碑上，那我们该选什么来刻呢?"一个研究者说，他会选他发现的某个重要的数学分析公式，另一个选他研究的某个几何图形，还有一个选他用心证明的某个优美定理，等等。他们就这样说着各自的心愿。接下来，一个研究者带着得意的微笑，转身问老师，"那你想拿什么刻在墓碑上呢?"几个研究者重新坐下，等着看"笑话"。老师回答，"我想把我最优秀的五个学生的名字刻在墓碑上；那是我最伟大的成就。"不知为什么，研究者们笑不起来了。

218° 精神数学

在新泽西普林斯顿高等研究院，两个数学家坐着，凝视着黑板，手里各拿着一只粉笔。黑板上一个字也没有。沉默了一个小时后，其中一个抬起眼来，有力地点点头，胜利了。另一个看着他，然后悲伤地摇摇头，失败了。（韦恩）

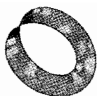
219° 测试问题

一个大学的辅导员用下面的问题来建议学生应该学什么课程。"牛有四条腿，如果尾巴也算一条腿，那它有多少腿呢?"

一个学生回答："四条。把尾巴叫腿，也不能使它成为腿。"这是现实主义者，该学科学。

回答"五条"的学生，有想象力，该去学数学。

回答"三条"的学生，能歪曲事实，该去学社会科学。



还有学生说，“那是一个好问题。”他该去教书。（韦恩）

220° 就业测试

一家大公司根据两部分测试，把前来应聘的人分为工程师和数学家。

在第一部分测试中，给应聘者一张椅子、一张桌子和一只点燃的炉子。桌上放着满满一壶水。问题是把水烧开。如果应聘者拿起壶来放在炉子上，他就通过了第一部分测试。

在第二部分测试中，还是那一套东西，不过壶放在椅子上，而不在桌上。问题还是把水烧开。拿起壶来放在炉子上的人，立即被归为工程师。如果谁拿起壶来放在桌上，说“现在问题和前面的一样，我已经解过了！”——他就是数学家！（韦恩）

221° 数学家

像下面那样在美国数学会上报告学术论文的数学家，是司空见惯的。在报告当中，他想着数字“5”，但说成了“4”，而在黑板上写成了“3”。当然，正确的数字应该是“6”。

222° 轻信的地位

克莱因（Morris Kline）说过，17 世纪的数学家是多么幸运，他们“太轻信了，甚至有些天真，而不在逻辑上谨小慎微。因为那是数学创造的最伟大时期，自由创造必然走在形式和逻辑基础的前面。”

223° 诺瓦利斯的五句话

哈登伯格（Friedrich Leopold Hardenberg，1772 ~ 1801），更

出名的是他的笔名诺瓦利斯（Novalis），是德国作家和赞美诗作者，与史莱格（Schlegels）和蒂克（Ludwig Tieck，1773～1853）共同开启了德国浪漫派。他的赞美诗和片段小说是那一派的典型作品。除了哲学、艺术、宗教和法律，他还坚实地踏在数学和自然科学的土地上。在他的作品里，随处可见大量有关数学和科学的评论。那些深刻而敏锐的评论，也许能结集成一本小册子。下面是其中的五句话：

1 真正的数学家本身是狂热者，没有狂热就没有数学。

2 一个人可以是不会计算的一流数学家；一个伟大的计算家也可能毫无数学思想。

3 音乐与代数有着很多相似。

4 对数对数学家的作用，犹如数学对其他科学。

5 纯粹数学是魔术师的手杖。

224° 教学与研究

有人说，“基督是伟大的老师。”

另一个人回答：“是啊，可他发表什么作品了吗？”

225° 定理与奖赏

一天一个定理，
意味着金钱和地位！
一个定理一年，
你就等着玩儿完！（厄多斯）

226° 危险的职业

下面的故事，见 1970 年 2 月 12 日缅因州波特兰市《晚间

特快》：

合众国际社费城讯：一个数学家显然觉得他所在的费城大学的教授们拒绝给他博士头衔，在一次演讲中向他的导师和前系主任开枪，然后饮弹自尽了。

警察说，33岁的康托站在演讲厅门口，用45口径自动手枪向40岁的科佩尔曼（Walter Koppelman）博士和45岁的古德曼（Oscar Goldman）博士连开5枪。

康托未说话，调转枪头放进嘴里，扣动扳机，倒在血泊中，距离数学大楼雷登豪斯（David Rittenhouse）实验室演讲厅门口5英尺。

演讲厅有6排座位，古德曼坐前排，右腕、右脚和左手负伤，倒在地板上。

古德曼后来在宾州大学长老会医院，状态良好。

科佩尔曼离古德曼两个位置，右臂中弹。医生说子弹钻入了胸腔。他伤势严重，接受了长时间的手术。

费城的施瓦兹（Kenneth Schwartz）警官说，康托对宾大数学系的几个教授怀恨在心，因为他没能得到博士学位。

“他痛恨教授委员会，”施瓦兹说，“他不得不交他的学位论文，他不停地交，而他们不停地拒绝。”

科佩尔曼是康托的论文指导老师，古德曼是他的教授，1963年到1967年间任数学系主任。

出席演讲的坦普尔（Temple）教授格罗斯瓦尔德（Emil Grosswald）博士说，他认识康托，在宾州大学教过他，“很不错的孩子，但有时行为古怪。”

事件的最后结果是，古德曼痊愈了，科佩尔曼一个月后

死了。即使活着，他也会下身瘫痪。

数学女人

直到最近，妇女才真正进入数学和精确科学领域。不久之前，妇女的这种追求还令人侧目，也根本没有那样的机会。这种状况体现在数学的历史中，从古希腊末年到20世纪初，只能列出五个真正杰出的女数学家：亚历山大的海帕蒂娅（Hypatia，约370~415），玛丽亚·昂雅泽（Maria Gaetana Agnesi，1718~1799），索菲·热尔曼（Sophie Germain，1776~1831），索妮娅·科瓦列夫斯基（Sonja Kovalevsky，1850~1891）和诺特（Emmy Noether，1882~1935）。我们相信，今天的妇女解放和男女平等的觉醒，会产生越来越多的杰出女数学家。

这里，我们讲几个索菲、索妮娅和诺特的故事，海帕蒂娅和玛丽亚的故事已经在《走进数学圈》里讲过了（90，273和274）。在这9个故事中，前8个经允许改编自艾奥柯巴奇（Rora F. Iocobacci）教授的“女数学家”，原文发表在《数学教师》和《算术教师》杂志。

227° 索菲如何走上数学研究的?

索菲1776年4月1日出生在巴黎。小时候没表现出任何非凡的能力，可是1789年，她刚13岁时，一个偶然事件使她走上了数学研究之路。

1789年5月的三级会议聚焦了18世纪法国的经济、社会和政治矛盾。6月，第三等级的平民宣布自己为国民大会，7月14日，攻占巴士底狱，接着是10年的暴力革命。索菲困在屋子里，

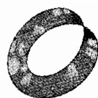

索菲·热尔曼(1776～1831)

在父亲的书房读书。一天，在蒙塔克拉（Montucla）的《数学史》中，她偶然读到了阿基米德的传说。她看到，作为叙拉古（西西里岛上的一个希腊城邦）人的阿基米德，设计了机械来驱除罗马敌人，保卫自己的家园。公元前212年，当叙拉古城陷落时，阿基米德正专心致志研究沙盘上的数学图形，却被罗马士兵的长矛杀死了。故事震撼了索菲。她发现了一门科学，即数学，能完全吸引一个人的精神，令他浑然忘记周围的一切。这种强烈而持久的研究，能帮助她面对当前的城市的骚乱。她决定研究数学。

228° 一个叫“布兰克”的索菲

巴黎理工学校（Ūcole Polytechnique）在1794年开学时，还拒绝接收妇女，但索菲能弄到不同教授的讲课笔记。拉格朗日的新分析自然吸引了她的注意。课程结束时，她借学生向老师交书面报告的机会，以布兰克（M. Le Blanc）的假名与拉格朗日联系。拉格朗日很欣赏报告，知道作者身份后，他举荐了这位年轻的数学分析专家。从此，索菲也自认为是一个数学家了。

1801年，高斯的《算术研究》出版了。1804年，索菲和高斯通信，给他寄了一些她的数学研究结果，仍然用布兰克的假名。几封信后，她的许多敏锐的洞察给高斯留下了深刻印象。当



法国将军佩尼提（Pernety，索菲曾向他推荐高斯）揭开她的身份后，高斯慷慨地赞美了她。

229° 索妮娅是如何走上数学研究的？

索菲亚（Sophia Korvin-Krukovsky），即后来的索妮娅，1850年1月15日出生在莫斯科的一个俄罗斯贵族家庭。8岁时，她随全家移居伯里宾诺（Polibino）的乡村庄园，在那儿度过童年，接受早期教育。她的启蒙老师说她活泼可爱，身体强健，淡褐色的眼睛闪烁着伶俐和善良的光芒。她的数学功课包括两年半的算术、三年半的代数和几何，最后还学了平面和立体几何。

索妮娅说过吸引她做数学研究的因素有两个。第一是她的叔叔皮奥特（Pyotr），他曾自学数学，常给她讲化圆为方和渐近线（即不断逼近但永不与曲线相交的直线），也讲许多其他激发她想象力的东西。第二是一张奇怪的“墙纸”，原是伯里宾诺人用来盖小孩儿房间的，她父亲读书时买来做了微积分课的笔记。这些纸片令她着迷，她常常一坐几个小时，试图破解每一个词句，清理纸片的顺序。（Rora Iacobacci）

230° 索妮娅是如何去德国学习的？

1867年秋，索妮娅来到圣彼德堡，跟海军学校的数学老师斯特兰诺里夫斯基（Alexander Strannolyubsky）学微积分。在那儿，她为自己的数学研究请教了著名俄罗斯数学家切比雪夫（Chebyshev）。但俄罗斯的大学是向妇女关闭的，她在家乡无法追求高等研究。

这时，索妮娅面对的情形也折磨着俄罗斯上层家庭的百千女儿，她们都想继续学习，尽她们的力量为自己国家的进步做出贡


索妮娅·柯瓦列夫斯基(1850～1891)

献。惟一的办法是到外国的大学去学习，而这种想法通常遭到父母的反对。于是，许多女孩子和抱同样观点的青年假结婚。这样，“夫妻”就能自由在外求学了。索妮娅的姐姐安娜有个熟人愿意帮助她们，他就是弗拉基米尔·柯瓦列夫斯基（Vladimir Kovalevsky），后来成为著名的古生物学家。

弗拉基米尔倾慕索妮娅超前的数学、流利的外语、全面的才能和勤奋的态度。1868 年 9 月，他们结婚了，第二年春天去了海德堡。

231° 外尔斯特拉斯最喜欢的学生

索妮娅在海德堡期间（1869～1870）听了柯尼希贝格（Konigsberger）和杜布瓦－雷蒙（Du Bois-Reymond）的数学讲座以及基尔霍夫（Kirchoff）和赫姆霍兹（Helmholtz）的物理学讲座。然而，柯尼希贝格是外尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815～1897）过去的学生，索妮娅从他那儿感到了他对老师的崇敬，于是想去听那位著名的数学大师在柏林的讲座。1870 年 8 月，她到柏林加入新学期，可是发现那儿的大学不要女生，也不可能为她破例。于是她直接去见外尔斯特拉斯，大师刚接到柯尼希贝格满怀信心的推荐信，就为她私下开了课程。

索妮娅很快成为外尔斯特拉斯最喜欢的学生。他为她重讲了一遍他在大学讲过的课，还和她讨论他未发表的论文、最近的科

学成果、稳定性问题和新的几何理论。他写信给朋友说，他还没有哪个学生像索妮娅那么勤奋，那么能干，那么热爱科学。她跟他学了四年（1870～1874），不但学完了大学的数学课程，还写了三篇重要论文：（1）论偏微分方程理论；（2）关于第三类阿贝尔积分化为椭圆积分；（3）关于拉普拉斯土星环研究的补充研究和观测。

1874 年，哥廷根大学因为她那三篇杰出的论文，免除了她的口试，在她缺席的情况下授予她哲学博士学位。她把偏微分方程的论文作为学位论文，同时也提交了另外两篇文章。

232° 索妮娅的座右铭

1888 年，快满 38 岁的索妮娅取得了最大的成功，因为论文《论固体绕定点旋转的问题》荣获法国科学院博丁奖（Prix Bordin）。提交论文时加了一句座右铭："说你知道的，做你该做的，走你能走的。"这篇论文不但被评为 15 篇里最好的，还被认为具有不同寻常的价值，因而奖金也从 3000 法郎增加为 5000 法郎。

233° 诺特为什么成了代数学家?

给艾米·诺特（Amalie Emmy Noether，1882～1935）早年带来最大数学影响的是她的父亲马克斯（Max Noether，1844～1921，爱尔兰根大学著名的数学家，对代数函数的发展有过重要贡献）和戈登（Paul Gordon，1837～1912，也在爱尔兰根大学，马克斯一家的亲密朋友）。两个老师也表现了一点儿多样性：虽然同为代数学专家，他们却是根本不同的数学家。马克斯偏重结构，而戈登是"计算者"。1907 年，诺特在戈登指导下写博士论文，"论三元双二次形式不变量的完全系统"，洋溢着戈登的数

学精神。这是一个极端的传统计算的例子，迥然不同于她成熟以后的作品——数学的概念化、公理化思想的极端例子。

1910年，戈登退休，第二年由费歇尔（Ernst Fischer）继任，专业也是代数学，特别是消去理论和不变量理论。在他的深远影响下，诺特实现了从传统观点向希尔伯特方法的转变。这个阶段延续到1919年。

234° 爱因斯坦赞美诺特



艾米·诺特(1882～1935)

1933年春，德国剧变，诺特和许多人一样被禁止参与学术活动。在哥廷根不可能工作了，她到宾夕法尼亚的布林玛尔（Bryn Mawr）学院做教授，然后去普林斯顿高等研究院。在美国，诺特再次赢得了同行的尊敬和友谊以及学生的欣赏和崇拜，这一切使她在生命的最后一年半里幸福快乐，硕果累累。1935年4月14日，53岁的诺特在生命的巅峰时刻去世了。1935年5月，爱因斯坦在悼念诺特的文章中写道：

> 根据当世有资格的数学家们的评判，诺特小姐是自女子高等教育开始以来，出现的最重要的创造性的数学天才。在最聪明的数学家苦心经营几个世纪的代数学领域里，她发现的方法，已被证明在今天年轻一代的数学家的成长中，有着

重大的作用。

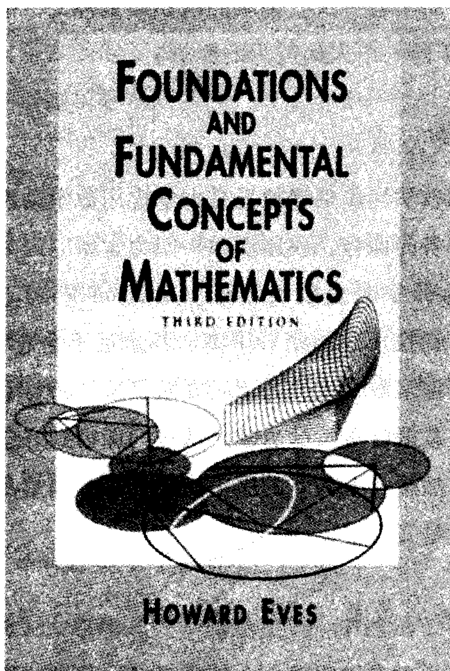
(Rola Iacobacci)

235° 兰道谈诺特

曾有人说，艾米·诺特是德国数学家马克斯·诺特的女儿，对此，兰道（Edmund Landau）回答："马克斯·诺特是艾米·诺特的父亲。艾米是诺特一家的坐标原点。"

作者经历的一些故事

多年来教数学，编辑杂志专栏，四处发表演说，收集数学故



伊弗斯（与 Carroll V. Newson 合作）的名著《数学基础与基本概念》（原书发表于 1957 年，这是 1997 年 Dover 版封面）

7 “作者”即这套《数学圈》的作者霍华德·伊弗斯。

事，与同事书信往来，自然会发生一些有关的奇特而可乐的事情。下面就是其中的几个。[7]

236° 两个欠古债的人

8 NCTM，美国国家数学教师理事会（National Council of Teachers of Mathematics），成立于1920年，是世界最大的数学教育组织，有100000会员，250多个机构。本书常提到的《数学教师》杂志是它的著名刊物之一。

几年前，在科珀斯克里斯蒂（Corpus Christi）召开的NCTM会议的间歇，[8]我和倍如斯卡（Bezuska）神父在一张小桌前喝可乐，话题转到几何和古老的欧几里得。最后我说，“欧几里得对我有不可估量的恩泽。中学时读《原本》前六卷，是我一生的转折点，它决定了我以数学为终身事业。”然后我陷入沉思，“一个人在2000多年前做的事情，竟能如此影响人的一生，岂非太奇怪了？”接着，我又突然意识到，也许根本没有什么可惊奇的，因为我对面坐着一身牧师服的倍如斯卡神父，他的一生也同样深受2000年前一个人的行为的影响。

237° 纪念泰勒

我最早的教学岗位是锡拉丘兹大学应用数学助理教授。除了教工程数学的各门课程，我还要教一门力学课。因为没有力学经验，我决定旁听令人爱戴的泰勒（William E. Taylor，1870～1945）教授在锡拉丘兹的精彩讲座。我永远不会忘记第一堂课。泰勒教授是笃信宗教的人，开课时郑重其事地祷告上帝，求上帝帮助他的学生掌握好美妙的力学，从这门课得到好成绩，并永远地喜欢它。虽然第一个美好的愿望没能在每个同学身上实现，第二个愿望无疑是实现了。

238° 数学家与信教者

有段时间，我正好住在一个教堂的对门，主持教堂的是一位

笃信正统基督教的牧师，从此以后他就关心我的生活。他给我讲了好多低矮地方的可怕故事，描述了酷热的恐怖，让我赶紧加入他的教堂。在一个抱歉的日子，我给他开了一个他不喜欢的玩笑，告诉他，来这儿的数学家和工程师已经用空调和冰箱大力改善了这个地方。

不久，我收到从1970年1月8日（星期二）班戈《每日新闻报》上剪下的一角报道：

难免的事

挪威赫尔讯（合众国际社）：星期二，气温降至零下6摄氏度，赫尔地区发生冰冻。

我想，大概太多的工程师在摆弄他们的空调。我希望他们小心一点儿，别糟蹋了好东西。

239° 霍格特的俏皮话

可敬、热情而能干的西海岸数学家小霍格特（Verner. E. Hoggatt，Jr.）说起俏皮话来，脱口而出。我刚告诉他我正在第二次经历“数学圈”，就收到下面的一封航空信：

“你认为那些走在圈上的人会走直线吗？如果是，那么他们会走切线吗？”

我想知道的是，他到底想告诉我什么。

240° 所有的好书都读了

我教书的最大乐趣之一，就是在学生中遇到了霍格特。他是我在普吉特湾大学的一年级学生，后来又在俄勒冈州立大学听过

我很多课。我从没见过那么狂热的同学，也从没那么欣赏过一个同学。我们长久、热烈而有价值的友谊，就那样开始了。霍格特现在是圣何塞（Sen Jose）大学数学教授，被公认为也许是世界最重要的斐波那契数列权威，也是他创办的著名的《斐波那契季刊》的活跃主编。

霍格特的魅力之一在于他令人愉悦的机智。我记得很早的一件事情，那时他还是普吉特湾大学的新生。我正在讲数学归纳法原理，对同学们说，"设想书架上有一排书，假定我们知道，如果第一本是红色的，那紧跟的一本也是红色的。假如我们透过一条缝，看见第8本是红色的，你能得出什么结论呢？"这时，霍格特问，"它们都是好书吗？""当然，"我说，"我们假定它们都是好书。""那么，"他回答，"书架上所有的书都是红色的。"我有点儿惊讶，问，"为什么呢？"他解释说，"因为，你知道所有的好书都读过了。"[9]

9 这儿当然是文字游戏，"红色"（red）与"读过"（read）的发音一样。

241° 移居戈尔翰

我被派往戈尔翰（Gorham）学院（新成立的缅因州立大学的分部之一）一两年，帮助建立数学系。安排妥当不久，缅因州大学公关部在班戈《每日新闻报》发了一则两栏的小消息，附有一张我的照片，消息说我和全家将暂时从奥罗诺（Orono）迁居戈尔翰。小消息的上边和右边是一个长篇通讯，标题横贯四栏，巨大而醒目：新家为精神病人准备好了。

242° 亚当和夏娃

在奥罗诺有个深受敬重和喜爱的亚当（Adam）博士，多年负责为大家提供医药服务。一天晚上，我房间的电话响了，我拿

起话筒，是一个女人的声音，“是亚当博士吗?” “不，” 我回答，“是夏娃博士。”[10]接着是片刻的沉默，最后又听到那女士的声音，带着怒气，“哦，见鬼！”电话突然挂断了，留下我愣了好一会儿。

10 作者是 Eves，夏娃是 “Eve”。

243° 汤普森先生

长期做编辑，会遇到许多有趣的事情，至少在我做《美国数学月刊》初等问题部编辑的25年里，就是这样的。一个有趣的例子是华盛顿塔科马（Tacome）的汤普森（S. T. Thompson）先生。

汤普森的故事是这样的：一次，我在编辑文稿时发现能找到一个比所有投稿都好得多的方法来解决某个问题。实际上，我的解法有时也是我所知道的惟一的解法。考虑到发表本人的解法不大妥当，我就杜撰了一个汤普森先生，还含糊地让他居住在华盛顿的塔科马（我那时就住那儿），把我的解法归功于他。

那时候，哈里·吉曼（Harry Gehman）教授（多年来是美国数学会积极而出色的财务秘书）一直很留意新会员。他看到汤普森的名字经常出现在《月刊》的解题者中，就写信问我要汤普森的详细地址，他想邀请汤普森加入学会。我回信告诉他，请汤普森入会是没用的，因为汤普森先生很讨厌学会，没什么东西能让他成为会员。不用说，哈里对这样的态度感到疑惑而沮丧，百思不解。

这是汤普森先生第一次公开暴露真实身份。

244° Umbugio 教授

另一个故事和汤普森先生的事情差不多，要追溯到1946年《美国数学月刊》初等问题专栏的几页。那时，波利亚（Georgy



Polya）教授和我考虑，如果在每年的4月那期刊物上发布某种愚人问题，大概能让刊物活泼起来——那种问题，直接求解会枯燥而冗长，但动动脑筋，会发现非常简洁而优美的解法。我们决定，让这样的问题出自一位名头响亮而有来头的 Guayazuela 的 Euclide Paracelso Bombasto Umbugio 教授。

Umbugio 教授的名声远播，四月愚人题也借他的手由忠实的数学家们按时交来。这个恶作剧骗过了很多《月刊》的读者，问他地址（好和他进行学术交流）的来信都能编一本小书了。穆瑟教授在他读研究生的时候就问过 Umbugio 教授的地址。所有问讯者都被告知，Umbugio 教授三天两头搬家，和他联络的最好方式就是把信寄给初等问题专栏，由编辑转交。

245° 编辑趣事

初等几何里有个令人困惑而着迷的所谓"蝴蝶问题"：令 O 为圆的某给定弦的中点，另外两弦 TU 和 VW 经过点 O，TW 与 VU 分别交定弦于 E 和 F，证明 O 为 FE 中点。问题的名字来自它的图形像一只张开翅膀的蝴蝶（图26），一个中学生能解决这个问题，就了不起了。

为了征集蝴蝶问题的不同精妙解法，我曾将它刊登在《美国数学月刊》的初等问题专栏（问题 E57，1943 年 5 月）。我收到了一些真正精巧的解法，到了截止时间（1944 年 2 月号），我发表了其中的一些。发表的解中有一个特别引人入胜的，来自斯塔克（E. P. Starke）教授，他是美国最杰出的解题专家，曾经是《美国数学月刊》高级问题专栏的编辑。

几年过后的一天，我收到斯塔克教授的信，说他那学期有个聪明的挪威学生，给他出了一道非常棘手的几何问题。教授承

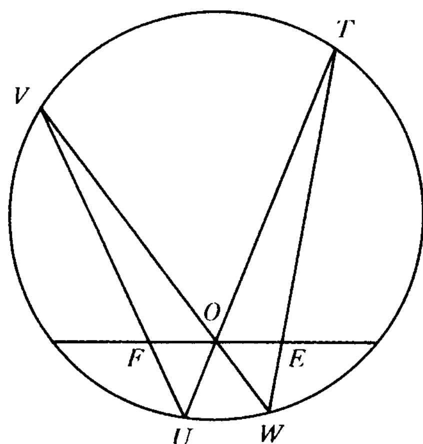


图 26

认，他为这个问题费了很多时间，但没能成功，他问我是否能帮他解决。接着他谈了问题。看呀，原来就是蝴蝶问题！我让他去看《美国数学月刊》的那儿页，但没提任何人的名字，他自己的优美解法也在那儿呢。

246° 维纳的帽子

有一次，一小群研究生陪哈佛和麻省的教授们去纽黑文参加在耶鲁大学召开的数学会议。我那时还是研究生，而维纳（Norbert Wiener）是教授。那天下雨，我们都带着帽子，不让雨水顺着脖子往下流。大约中午，一群人来到耶鲁的自助餐厅午餐，将雨衣和帽子挂在前厅的衣帽架上。午餐过后，我们起身来取衣帽。维纳教授无意间拿了我的帽子（一点儿也不像他的），戴在头上。因为我的帽子比他的小很多，我想他很快就能察觉拿错了，但他没有，而是可笑的顶着我的小帽子站在那儿。于是，我

也就拿了他的大帽子戴在头上，把耳朵都盖住了，低低地落到鼻梁。我这样盖着顶大帽子，望着维纳教授，想他现在总该发现错了吧。他一点儿也没在意，甚至没听见我们一群人的大声欢笑。我们就这样戴着交换的帽子走出了餐厅。

247° 爱因斯坦的一缕头发

我有幸在普林斯顿大学做了一年的研究生。就在那年，爱因斯坦博士成了普林斯顿高等研究院的一员，而我也结识了这位伟人。我住在研究生院一座矮塔楼的顶层，而爱因斯坦住在几个街区外的村子里，我偶尔陪着爱因斯坦往来大学。一个雨天，我和爱因斯坦一起去学校，一路上，雨水把他的长发（他很少戴帽子）挡住了前额。我们去爱因斯坦在数学系费恩楼的办公室，一边讨论，一边等前额的头发干。因为讨厌的头发，他不时得用手去把它撩开，但总是又回来。突然，他一时火起，从书桌上抓起一把剪刀，剪掉那缕讨厌的头发，扔进了字纸篓。我老想着自己的数学博物馆，后来就把那缕头发收起来，保存在一个信封里。

248° 哈代的围巾

我在普林斯顿读研究生的那年，哈代教授从英国来过了一个学期，讲一些陶伯型（Tauberian）定理。[11] 他很快就吸引了我们大家。

哈代穿着厚厚的粗花呢外套，即使最冷的天也只是外加一条长长的白色的脏围巾，一圈一圈地围在脖子上。不久我就为我的数学博物馆算计那条围巾了。于是，有一天，当哈代走进我们吃晚饭的哥特式大餐厅时，我从衣帽钩上取下了他的长围巾，换了

11 陶伯（A. Tauber，1866 ～ 1942）在 1897 年提出了一个关于级数收敛的定理，后来出现一系列类似的定理。现在它已不仅限于级数问题，在积分变换中也有类似的定理，如“维纳的陶伯型定理”。

一条我能在村里买到的最好最贵的围巾。晚饭后，哈代出来时，发现那儿是一条漂亮的新围巾。他开始嘟哝着，我安慰他说，不管谁拿了他的围巾，当然是要换一条好得多的呀。他只好让步，最后拿走了新围巾。我等了几天，想确信他对那个秘密交换感到愉快。看到他满意的样子，我才把他的围巾列入我的博物馆收藏——当然，还保留着原来那脏乱的状态。

249° 可疑的藏品

那是在 1960 年秋，美国几何学家维布伦（Oswald Veblen）在缅因州布鲁克林附近的别墅中去世了。第二年夏天，我怀着朝圣的心情访问了别墅，在那儿见到了维布伦夫人，她正要和几个夫人开车出去旅行。夫人很慷慨，允许我在她出门的时候在周围漫步，连房间也没锁，我可以随时进屋参观。我谢绝了进屋的好意，只在别墅周围漫步。别墅坐落在公路前面，下临海滨，可以远远望见阿卡迪亚国家公园的美景。漫步时，我偶然发现一支没怎么用过的嫩黄色铅笔，中间折断了，但还粘在一起，似乎是被踩了，在这儿躺了整个冬天。我捡起铅笔，心想它是不是大师的，是不是被大师用过。我推想，一个几何学家总要随身带着铅笔，假如是维布伦夫人的，她多半是在屋里用，写点儿杂货清单之类的。最后我把铅笔装进口袋，作为我的数学博物馆的又一件可能藏品。

第二年夏天，我碰巧去国家科学基金会在鲍多因（Bowdoin）学院举办的暑期讲习班讲课，普林斯顿的塔克（Tucker）教授也在。一起吃午饭时，我给塔克教授讲了那支断铅笔的故事。他马上陷入沉思，显然是想说明他不大相信那是真的。最后，他眼睛一亮，抬头问了我一个令人吃惊的问题："你知道吗，"他满怀

信心说，“维布伦教授在最后几年里几乎失明了——只能看到眼前的一点儿东西？”我不知道有这样的事情，一时想把铅笔给扔了。可我接着想，除了只有边缘视野的人，谁还会把一支新铅笔弄丢而找不回来呢？我把这个推理告诉了塔克教授，他陷入了显然失望的沉默。

布尔巴基

从 1939 年开始，一套囊括从最一般的基本原理到各专业领域的数学书陆续在法国面市了，作者冠名为布尔巴基（Nicolas Bourbaki）。布尔巴基的名字最早出现在一些笔记、评论和发表在法国科学院院刊（*Comptes Rendus*）的论文等场合。接着，布尔巴基的宏大理论开始一点点地构筑起来。一篇文章解释了大理论的目的，其英译发表在 1950 年《美国数学月刊》，题为“数学的构造”。文章的一个脚注说，“布尔巴基教授，前 Poldavian 皇家学会会员，现居法国南希，编著了一部以《数学基础》（*Éléments de Mathématique*，Hermann et Cie，Paris，1939 ~ ）为题的集大成的现代数学著作，正在出版中，目前已出版 10 卷。”到 1970 年，出版了 30 卷。

250° 多头的数学家

布尔巴基的名字是希腊的，国籍是法国，而且一定是 20 世纪最有影响的数学家之一。他的著作广为流传。他赢得了狂热的拥护者，也招惹了严厉的批评家。而最令人惊讶的是，他根本不存在！

布尔巴基是一个松散的数学家群体共用的笔名。虽然组织里

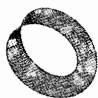
的成员不讲什么秘密誓言，但多少带点儿神秘，他们多数还是喜欢的。不过，他们的名字对大多数数学家来说却是公开的秘密。据说，原来的成员有谢瓦里（C. Chevalley）、德尔萨特（J. Delsarte）、迪厄多内（J. Dieudonne）和韦伊（A. Weil）。成员人数逐年不同，有时多达20个数学家。除了成员必须在50岁退休，组织的惟一规则就是不要一切规则。群体的工作基于一个不可证明的形而上学的信仰：每个数学问题，在众多可能的处理方法里，都有一个最好或最理想的方法。他们集体用一个假名，大概一半是为了好玩儿，一半是为了避免在著作的标题也上枯燥地罗列那么多的名字。

251°“布尔巴基”的来历

尽管布尔巴基群体的创立者们故意隐藏了 Nicolas Bourbaki 名字的来历，还是有几个传说来解释他们的选择。

有个叫布尔巴基（Charles Denis Sauter Bourbaki）的将军，在法国与普鲁士的战争中赢得了一点名声。1862年，他46岁，被奉为希腊国王，但他拒绝了。在1871年的一次惨烈战役中，他溃败瑞士，被拘，想自杀。显然，他自杀未遂，因为最后活到了83岁。据说在南希有他的塑像，这大概就是他与后来那群数学家的一点渊源，因为有几个数学家都在不同时间与南希大学有关。这个解释还留下另一半“Nicolas”悬疑。

另一个关于布尔巴基来历的传说，基于下面的故事：大约40年前，学生进巴黎高等师范学校（那是培养了众多法国数学家的地方），要听一个著名数学家 Nicolas Bourbaki 的演讲。其实，那人不过是一个假装的业余演员，或者一个高年级同学，很会板着脸讲一些似是而非的谁也听不懂的数学。



252° 布尔巴基的申请

布尔巴基曾申请加入美国数学会，学会官员认为这简直是笑话，感到很不愉快。申请被拒绝了，还被冷冰冰地建议申请为单位会员。单位会员的会费比个人会员高得多，而布尔巴基不想承认自己并不存在。于是，学会再没听到任何回音。

253° 针锋相对

在《不列颠百科全书》的《1947 年补编》里，出现了关于布尔巴基群体的一篇短文。作者是鲍斯（Ralph P. Boas），当时为《数学评论》执行编辑。短文发表不久，《百科全书》编委会收到一封署名布尔巴基的伤害信，抗议鲍斯关于布尔巴基不存在的评论。编辑们很疑惑，而鲍斯也尴尬。还是美国数学会的一封信把问题澄清了，来信人正是拒绝布尔巴基入会申请的那个秘书。为了报复，布尔巴基造谣说，鲍斯其人并不存在。他们说，“鲍斯是一群年轻数学家的集体假名，他们联合充当《数学评论》的编辑。”

254° 改错

布尔巴基群体的主要推动者之一是迪厄多内（Jean Dieudonne），他还兼任秘书长。[12]由于迪厄多内写过大量以本人名字发表的数学论文，有时很难把他个人的工作从他为布尔巴基的工作中独立出来。从一个例子我们看到，他想以个人满意的方式忠实地记录这些工作。他好像以布尔巴基的名义发表过一篇短文，但后来发现有一点疏忽。在随后发表的一篇题为“关于布尔巴基的一个错误”的文章里，他纠正了疏忽，署名迪厄多内。

12 在整个布尔巴基群中，也许迪厄多内离我们更近一些。特别是他的多卷本《现代分析基础》是很流行的高等分析教程（科学出版社有前两卷中译本）。

255° 布尔巴基的典范

迪厄多内承认，范德瓦尔登（Van der Waerden）的代数学名著是布尔巴基最早效法的典范。[13]实际上，范德瓦尔登的书可以认为就是布尔巴基式的，不仅因为其风格和精神，还因为他在前言里说，那部书有几个作者，包括诺特和阿丁（Emil Artin）。

13 范德瓦尔登的两卷《代数学》也是中国老一辈数学家阅读的经典，有科学出版社的中译本。

256° 一团乱麻

当今数学的布尔巴基观念，或至少迪厄多内的观念，认为今日数学就像一团乱麻（图27），一股股的麻线互相缠绕，了无头绪。不同的方向露出数不清的线头，没有一点儿内在的关联。布尔巴基方法就是剪断那些无端的线头，只关注中央的线团，把线一根根抽出来。线团的紧密中心包含着数学的基本结构和基本过程或工具——也就是数学中从思想发展成为方法并很好确定下来的那些部分。布尔巴基正是试图逻辑地编排这些东西，构造一个和谐的易于应用的理论。于是，许多数学都被有意识地排斥在了布尔巴基群体的领域之外。

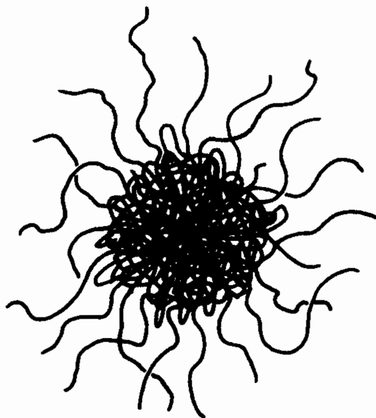


图 27

257° 布尔巴基是怎么工作的？

布尔巴基的研究方法繁冗而痛苦。他们每年开两三次会，决定必须要写的书或章节。初稿的任务交给某个心甘情愿的成员，

他便根据集体的相当模糊的计划着手编写草稿。一两年后，草稿完成了，他提交给布尔巴基大会，逐页逐行地大声朗读出来，听取与会者不留情面的批评。争论往往喧闹、热烈而刻薄，会场仿佛聚集着一群疯子。一旦草稿被无情撕成碎片，第二个志愿者会接着开始做一样的事情。等他的稿子也被撕碎，又会有第三个人站出来。就这样，纯粹因为人的因素，过程一直重演下去。最后，当每个人都几次甚至十几次看过了同一本书或同一章节，大家才一致同意拿去出版。即使这个出版的文本，也常会在后来的版本中改进。布尔巴基群体从开始决定做一本书到书的问世，平均需要八至十二年的时间。

258° 灯油

令布尔巴基大吃一惊的是他们陆续发表的著作赢得了巨大的商业成功，特别是在美国。成功看来是幸运的，因为丰厚的版税为他们的周游和饮食提供了充足的经费，也给他们的定期出版活动“加油”了。

259° 值得效法



图 28

布尔巴基在他们的作品里引进了一个有趣的符号，值得其他作者效法。当问题棘手或难以理解时，他们就在书页边上用一个显眼的 Z 型曲线（图 28）来警告读者，说明论证中的“危险转向”。

布尔巴基也喜欢简单的名词术语，废除了很多别人用过的名词。于是，“超球”（*hypershere*）和“超平行体”（*parallelotope*）就

被“球”（*boul*）和“砖”（*pave*）取代了。

260°“南加哥”大学

有套新高等数学书以令人难忘却疑惑的“南加哥大学数学研究所丛书”的名义出版了。全世界都找不到那样一所大学，但它的意思可以从书中发现。原来，丛书的作者一个来自南希大学，一个来自芝加哥大学。

阿基米德到卡宾

261° 发现阿基米德之墓

《走进数学圈》79 说起阿基米德之墓，下面是《纽约时报》新闻部发布的一篇相关报道：

> 罗马讯：意大利安莎新闻社（ANSA）昨日报道，西西里岛西南叙拉古的一家宾馆在奠基过程中发现了2200年前埋葬阿基米德骨灰的墓地。
>
> 150年来，人们相信这位古希腊数学家的墓地是在叙拉古希腊剧院附近发现的。
>
> ANSA说，在一个约六英尺长的镶嵌着珠宝和金印的铅盒中发现了阿基米德的骨灰。铅盒埋在一个占地80多平方码的石台中央的两块由铅棍链接的石头之下。
>
> ANSA说，据叙拉古荣誉考古学家锡安西奥（Salvatore Ciancio）教授的考证，此墓符合西塞罗的描述。



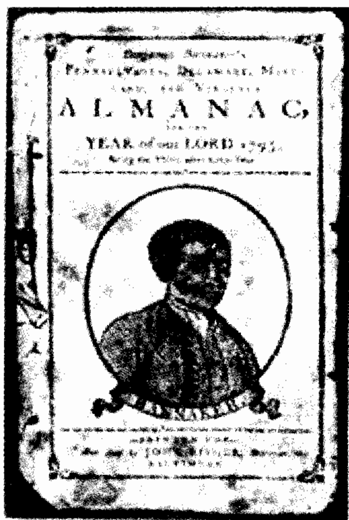
西塞罗寻访阿基米德之墓（1806年西塞罗《图斯库卢姆谈话录》（***Tusculan Disputations***）德译本卷首插图）

262° 好大的早餐

巴贝奇（Charles Babbage）和赫歇尔（John Herschel）讲过一件很有趣的遭遇外语尴尬的轶事。那时，他们在法国访问。一天早晨早餐时，巴贝奇为每人要了两个鸡蛋，告诉侍者：“pour chacun deux。”（“每人两个。”）于是，侍者大声对厨房说，“Il faut faire bouiller cinquante deux oeufs pour Messieurs les Anglais.”[14] 幸运的是，这吓人的早餐被及时叫停了。

14 侍者大概把巴贝奇的拙劣发音听成了“bouiller cinquante deux”，所以说“为两个英国先生煮52个鸡蛋！”

263° 战争与和平



班尼克的年报(1793)

班尼克（Benjamin Banneker，1731～1806）的一生有许多令人崇敬的事情。他是第一个美国黑人数学家；他从1792年到1806年出版了系列优秀的年报，进行自己的天文计算；他以借来的表为模型，用硬木做了一只可靠运行20多年的木钟；他赢得了当时的杰斐逊国务卿的热情赞美；他曾担任哥伦比亚区界堪定委员会的大地测量员；他解决算术难题和数学谜题的本领更是闻名遐迩。这些成绩之所以引人瞩目，还因为他几乎没有正式上过学，而主要是靠自学，在务农时从借来的书学习数学和天文。

尽管上面说的这些成就令人赞叹，更应该鼓掌欢呼的还有另

一件事情。在1793年的年报中，班尼克建议在总统的内阁里设立和平部，还制定了一套理想的和平计划来保证国家和平。每个国家都有负责战争的部门，假如班尼克的建议得到充分重视，美国将是世界上第一个有和平部的国家！实现这一理想的可能还是存在的——可时间过得太久了。

264° 班尼克问题

班尼克常接受来自不同地方的学者们提出的数学挑战，他们似乎喜欢考验他的本领。据说，他都回复了解决方法，从来没有失败过。他也提出自己的问题让别人来解，而且经常以自己创作的韵文来表述问题。下面是班尼克的一个韵文问题，感兴趣的读者也许愿意去解决它：

桶匠与酒商坐下聊天，
酩酊大醉寸步难移。
桶匠说，“我是本行老大，
除了我做的木桶别无他家，
不论什么形状，只要您喜欢；
不论什么尺寸，从大桶到小碗。”
酒商说，“好啊，你正是我需要的，
为我做一个容器，假如你同意。
顶和底固定了直径，
十五比九是我要的比例；
不高也不矮，三十五英寸的桶深；
不多也不少，三十九加仑的容积。
我给你金银做奖赏，

请你许下承诺，我的老兄弟。”
“明天就做好，你且等着瞧！”
桶匠在第二天动手，
新桶好了，大得太多；
取下几块木条，可惜太小；
他诅咒这木桶，还有酒商。
他垂胸顿足，“老天啊，”
他发誓绝不再做这买卖。
亲爱的朋友，请你来解答，
为他满足那桶的尺寸吧！

265° 非洲国王的伟大子孙

1731 年 11 月 9 日，班尼克出生在马里兰州巴尔的摩附近的一家农场。母亲是自由黑人，父亲是奴隶。他母亲的祖母原是英国白人，嫁给了一个非洲国王的儿子。

1791 年 8 月，班尼克给杰斐逊写了一封著名的信，为殖民地的数千奴隶请愿。他还随信寄了一本他即将出版的 1792 年年报。时任国务卿的杰斐逊给班尼克回了信，部分内容如下：

> 没人能比我更愿意看到您所证明的，自然赋予我们黑人兄弟的才智与其他色种的人是一样的，他们所表现的欠缺完全源于他们在非洲和美洲的恶劣生存环境……我已自作主张将您的年报寄给了巴黎科学院的秘书和慈善会委员孔多塞（M. de Condorcet），[15]因为我认为您的所有同胞完全可以凭着这个证据去反驳那些对你们的怀疑。

15 孔多塞（1743~1794）是 18 世纪法国最后一个哲学家，启蒙运动最杰出的代表之一，也是数学家，当时是法国科学院秘书。

266° 好理由

我曾听过贝塞科维奇（Besicovitch）的系列关于近似理论的演讲。他在第一讲中小心地指出，“在切比雪夫（Chebyshoff）的名字中没有字母 T。”第二讲中，他引进 T-多项式，“我们称它们为 T-多项式，”他解释，“是因为 T 是切比雪夫的第一个字母。”[16]

16 这是从俄文译成英文产生的问题。

267° 另一个好理由

在讲解析几何课程的开头部分时，可以说，“我们将直线斜率（slope）记做 m，是因为‘斜率’一词以字母 m 打头。我不知道还有什么更好的理由。”

268°《物理学评论》的一篇论文

贝塔（Hans Bethe）和盖莫夫（George Gamow）几年前结识了一个“即将诞生的”青年物理学家，他有个异乎寻常的名字。结果，三人发表一篇论文，若不是他们的名字特别，文章大概也构思不出来。1948 年 4 月 1 日（注意这个日期），《物理学评论》发表了一篇古板的关于化学元素起源的论文，惟一与众不同的地方就是它的署名：“Alpher，Bethe，Gamow”。[17]

17 三个名字的读音就是希腊文的前三个字母：α，β，γ。文章发表那天是愚人节。

269° 纪念

匈牙利的数学研究发端于法卡斯·博莱（Farkas，拉丁文为 Wolfgangus，德文为 Wolfgang，Bolyai）和他的儿子雅诺斯（Janos Bolyai）。今天，布达佩斯有三条用博莱名字命名的街道，以纪念他们一家。

270° 积分的人

卡宾（Sidney Cabin）在库博（Cooper）联合工程学校教数学时，经常让他的学生积分 d（*Cabin*）/（*Cabin*）。（忽略积分常数。）

第四象限

从柯西初露锋芒到维纳的信

从柯西到库里奇

271° 柯西初露锋芒

1800年元旦，柯西（Cauchy）的父亲当选为部长，在卢森堡宫安排了一间办公室。柯西那时才11岁，在父亲办公室的一个角落也有张自己的小桌子。时为巴黎理工学校教授的拉格朗日经常造访柯西部长讨论事情，也就熟悉了小孩儿的数学才能。一天，当着很多头面人物，拉格朗日指着小柯西说，“从数学家的角度说，这个孩子有一天会超过我们所有的人。”

272° 柯西的创作

柯西的数学创作太多了，以至他不得不为自己创办一种杂志，《数学练习》（1826~1830），接着是第二个系列，《物理学的数学分析练习》，他的论述性和独创性的数学作品都投入其中了。数学家们争相购买和研究这些著作，深受其影响。

关于柯西的大量创作，流传着一个有趣的故事。1835年，法国科学院开始出版《院刊》（*Comptes Rendus*），柯西向这个杂志交稿的速度太快了，科学院面对越来越多的印刷费，通过了一个至今还在执行的法规：所有发表的文章最长不得超过4页。柯西只好为他的长篇大论另寻出路，有的甚至超过了100页。

柯西的全部著作共789篇，其中不乏内容深广的宏论，整整24大卷！有人批评他写得太多，有的也太草率。

273° 柯西的固执

在宗教上，柯西固执己见，容不得别人的信条。他花过很多时间去说服别人皈依他的特殊信仰。当 21 岁的托马斯（William Thomas，后来的开尔文勋爵）拜访柯西要和他讨论数学时，柯西却把所有时间都用来劝这位虔诚的苏格兰独立教会的年轻信徒改信天主教。

人们常批评柯西全凭个人的宗教和政治观点选拔科学学会的成员，根本不管候选者的科学素养。柯西因此成了很多同事不欢迎的人。

274° 柯西与效忠誓言

柯西与效忠誓言的事件，对今天那些常为忠诚誓言感到厌烦的学者来说，是一个很好的范例。柯西的烦恼始于 1830 年，那时查理十世被革命推翻，菲利普（Louis Philippe）上台。柯西拒绝发誓效忠新政府，不得不离开科学院的职位流落他乡，先去瑞士，然后去都灵，最后到了布拉格。

1838 年，50 岁的柯西回到法国，重返科学院，因为院士们被特许不必向政府发誓效忠。这次，柯西被一致推举去填补法兰西学院的一个空缺。但他不得不放弃了，因为他又面临着他拒绝履行的效忠宣誓。于是，他被一致举荐去计量局。因为那儿迫切需要他，政府最终只好让步，同意柯西免予效忠宣誓。但政府想在计量局另选他人来取代柯西，而柯西拒绝让出他的位置。最后，1843 年，柯西以致民众公开信的形式公布了他的情况。他的信庄严捍卫了自己的良心和思想自由。最后，经过骚乱、罢工和内战，政府终于认识到了镇压的愚蠢。1848 年，菲利普被驱

逐，继任的临时政府采取的第一个行动就是取消效忠宣誓。

1852年，拿破仑三世建立了第二帝国，又恢复了效忠宣誓，但私下承认，柯西不用宣誓也一样继续他的演讲。

275° 柯西的最后一句话

1857年5月23日，柯西在68岁时突然去世了。他本来去乡下修养，治疗他的支气管病，却感染了致命的发热。临死前，他在和巴黎的大主教谈话，他最后一句话是对大主教说的："人去了，但他们的功绩留下了。"

276° 凯莱和西尔维斯特论欧几里得

西尔维斯特（J. J. Sylvester）热烈支持英国的几何教学改革，曾说他想将欧几里得"深深地"埋在小孩够不着的地方。另一方面，凯莱（Arthur Cayley）是欧几里得的狂热崇拜者，说他希望在英国的学校保留西蒙森（Simson）版的欧几里得《原本》。有人提醒他那个版本已经不是纯粹的欧几里得，而是欧几里得与西蒙的混合，他建议清除西蒙森的文字，严格遵从本来的欧几里得。

277° 凯莱和泰特论四元数

汤姆逊（S. P. Thomson）在《开尔文勋爵的一生》（1911）里讲了一个有趣的关于泰特（Peter Guthrie Tait）和凯莱的故事。泰特是哈米尔顿四元数的热情拥护者，而凯莱却没看出它们有什么用。为了向凯莱宣扬四元数，泰特说，"你知道，四元数简直就像随身的地图。""也许是吧，"凯莱说，"但在使用之前，你得先从口袋里把它取出来，然后［在笛卡儿坐标下］打开它。"

他微笑着中断了话题。

278° 克里弗德的个性

克里弗德的道德规范涉及自由和独立："世界上有一样事情比渴望需求更可恶，那就是甘愿服从。"他没有一点儿虚伪，在给波罗克（Lady Pollock）的一封谈他的理想行为理论的信中，他最后说，"顺便说一句，所有这些都只是理论，我的行为和别人的没什么不同。"他讨厌装模作样，有个熟人打算写一本哲学著作，他幽默地说，"他要写一本形而上学的书，而且确实有资格去写。他自以为具备的理解事物的清晰，他那不能表达自己无知的能力，也许会为他造就哲学家的好运。"他对任何人都不怀敌意，曾说："我相信，假如世界上所有的杀人犯、所有的教士、所有的撒谎者都集中在一个人的身上，他突然转过拐角来到我的面前，微笑着对我说'你好啊'，那一刻我是不可能对他粗暴无礼的。"

279° 库里奇教授和考试

哈佛大学大几何学家库里奇（Julian Lowell Coolidge）教授喜欢在学生考试时在教室里踱步，一边走，一边扫过同学们的考卷。假如看到什么令他不愉快的东西，他会向那个同学指出来，建议他把题目重新做一遍。(John K. Moulton)

280° 库里奇教授的测验

在一个数学集会上，库里奇教授走到会场前面，宣布他要做一个数学小测验，引起一片惊慌。数学教授都喜欢考别人，轮到自己被考却是另一回事情了。为了让大家冷静下来，他说他只想

验证一下多数数学家对初等的立体几何知道得太少了。

库里奇教授先回顾了几个定义，如三角形和四面体的中线和高。“现在，”他问，“正如任何学过几何的中学生都知道的，三角形的中线交于一点，但对四面体的中线能下同样的结论吗?”过了片刻，几乎在场的每个人都说当然一定是的。库里奇教授确认果然是那样的。接着他又问一个类似的问题，“正如任何学过几何的中学生都知道的，三角形的高交于一点，但对四面体的高能下同样的结论吗?”很多人立刻回答它们当然也交于一点，其余的人多数认为不太可能，还有的人害怕有什么陷阱，闭口不言。库里奇教授解释说，四面体的高通常并不交于一点，交于一点只发生在所谓垂心四面体的情形，那时四面体的每条边都在空间垂直于其对边。

教授接着又问了其他一些简单问题，很好地证实了他的判断：多数数学家对初等立体几何知之甚少。

从戴德金到热尔贝

281° 错误的讣告

泰茨（Heinrich Tietze）讲过一个有趣的关于戴德金（Richard Dedekind）的故事。1904 年出现了一种学术日历，其格言是“快乐每一天”（*nulle dies nisi festiva*），每天都记录数学家的生卒日期。其中，1899 年 9 月 4 日记为戴德金去世的日子。戴德金写信给日历的出版者说，也许 9 月 4 日是正确的，但 1899 年肯定是错了，因为他在那天很健康，而且还和共进晚餐的好朋友、来自哈雷的康托（George Cantor）展开了一场数学讨论。戴德金又

补充说，康托倒没用这个机会来攻击朋友，而是狠狠攻击了他犯过的数学错误。看来日历是完全弄错了，戴德金死于1916年2月12日。

282° 迪克森的双关语

在芝加哥杰克逊公园的一次野炊中，迪克森（Leonard E. Dickson）教授用一个老掉牙的双关语逗大家高兴。

"什么几何作图令你想起冰箱里的狗?"

答案是"一条垂线。"

"一页稿纸怎么会令人想起一只懒狗呢?"

答案是，"稿纸是墨写的平面，而抹斜的平面有倾角，而勤快的狗是不叫的。"（I. A. Barnett）[1]

283° 狄多问题

狄多（Dido）的丈夫被她哥哥皮格马利翁（Pygmalion）谋害了，她带着所有财产和几个忠实的朋友一道扬帆远航，也许因为海难，来到了北非海岸。她向当地的统治者要一块一张牛皮所能包围的地作为她和朋友的栖身地。统治者感觉要求并不高，就答应了。于是，狄多把牛皮割成尽可能细的皮条，结成一根长绳，从海岸的一头牵到另一头，于是整个海岸地带都被包围进来。传说讲的是，迦太基就这样建立起来了。[2]

上面的传说引出一个数学问题，即著名的狄多问题：求给定长度的曲线所能包围的最大面积。这个问题又孕育了一个数学领域，即我们知道的"变分法"。

284° 与狄多问题相关的

我们来说一个小把戏。一个人拿一张纸（如打印纸），吹嘘

1 原来标题是"竞争斯温福德教授"，读者也许记得，在本卷第二象限180，斯温福德也说过一个双关语。原文用了几个发音相近的短语来开玩笑，无法用中文转达其趣味：垂线（a perpendicular）发音同"a purp in the cooler"（冷藏柜里的小狗）；"墨写的平面"（ink - lined plane）读音同"inclined plane"（倾斜的平面），而倾斜的平面有角度（"a slope up"），发音同"a slow pup"（动作缓慢的小狗）。

2 故事见维吉尔（Virgil）史诗《埃涅伊德》（*Aeneid*）：The Kingdom you see is Carthage, the Tyrians, the town of Agenor...

他能在纸上开一个洞，然后用它推动一把真正的椅子。这话当然会引来观众一片嘘声。为了让怀疑的观众相信，玩儿把戏的家伙在纸上开一个洞，把纸粘在手臂上，然后用手臂推着椅子穿过房间。

其实，确实可以在纸上开一个适当的洞口，通过它以观众原来以为的那种方式推动椅子（理论上说可以任意速度）(图 29)。

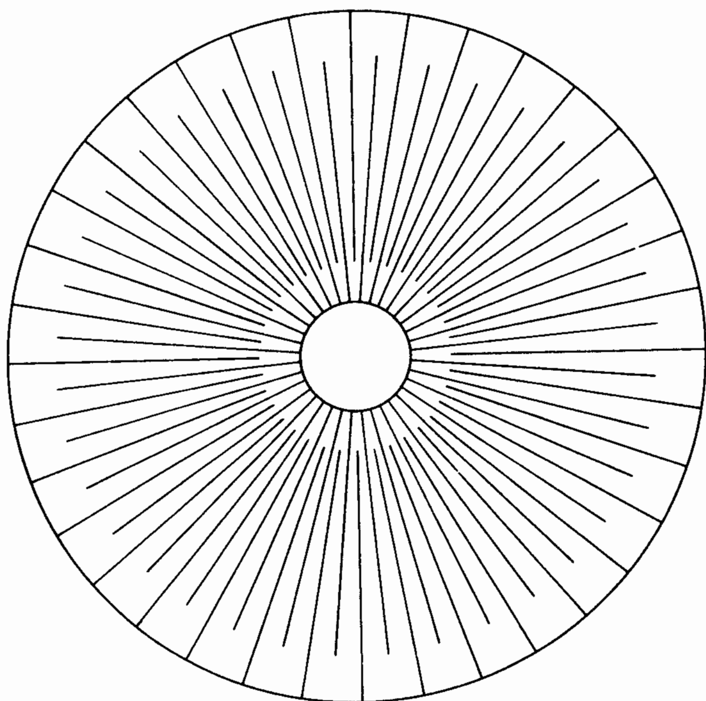


图 29

285° 杜法赫尔的悲哀

杜法赫尔（Maurice de Duffahel）只不过以他的名义重新发表一些数学大师的经典论文，就赢得了一时的名声。实际上，他

一点儿也没想去改装那些文章。1936 年，他以同样的方式盗用了皮卡德（Charles Emile Picard）在 24 年前发表的文章，连文字和符号都一模一样，只是觉得有必要删除一个引用原作者以前工作的脚注。审稿人非常熟悉皮卡德的文章，一下就识破了这个骗子，杜法赫尔的论文经历也就突然到了尽头。正如哈尔莫斯（Paul R. Halmos）说的，我们从中得到的教训是，“你能一时骗过某些编辑，却不能永远骗过所有的编辑。”

GEGENBAUER FUNCTIONS WITH A NEGATIVE INDEX.

By MAURICE DE DUFFAHKL.

Gegenbauer polynomials, which play a rather important part in several problems (for instance in the potential theory and harmonic analysis), are defined by the expansion

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n Cn^{\nu}(x)$$

Maurice de Duffahel 发表在《美国数学杂志》的文章（*American Journal of Mathematics*, Vol. 57, No. 4 (Oct., 1935), pp. 918～920）

286° 非凡的专家

艾伦博格（Samuel Eilenberg）来自波兰华沙，现在是哥伦比亚大学数学教授，是非凡的代数拓扑专家。他早年才华横溢，青年时代的朋友们都亲切称他 S^2P^2——意思是 Smart Sammy the Poland Prodigy（“聪明的美国佬，波兰的神童”）。

287° 可怕的极端

哥伦比亚大学师范学院费尔（Howard F. Fehr）教授 1957 年 5 月 11 日在锡拉丘兹的一次讲话中指出，“滔滔不绝的数学教授从两个极端影响听众——他让一些人感觉麻木，让另一些人感

觉愚蠢。”（韦恩）

288° 费叶的机智

[这个和下一个故事，经允许改编自波利亚（George Polya）的趣文“我所认识的几个数学家”，发表在《美国数学月刊》1969年8~9月号，746~753页。]

故事发生在德国的一个会上。那时我还是个“无薪讲师”（privatdozent）。我不能准确解释它，是薪水没有保障的一个职位，有点儿像（但不太像）助教——感谢老天，无薪讲师的体制今天已经开始退出历史舞台了。我当时已经结婚，妻子为数学家们拍了好多照片。她在学校门口的马路上拦着费叶［Lipot Fejer（1880~1959）］和三四个同伴拍了张照片。正准备拍第二张时，费叶开口了：“多精明的老婆呀！她把所有的正教授都拦在马路上，等大家被车撞了，她老公就好找工作了！”

289° 还是费叶的机智

几年后的另一个会上，费叶被一个匈牙利数学家气急了（这是有道理的），那人是一个拓扑学家，名字我就不说了。我跟着费叶走来走去，他总是不停地唠叨他愤怒的对象，最后说，“他讲的是一个真理的拓扑映射。”读者一定知道，拓扑映射能产生多么大的扭曲。[3]

3 从拓扑学看，馒头、面包和巧克力糖块都是一样的，“拓扑映射”能把其中的一个变成另一个。

290° 热尔贝的谶言

说起法国著名学者、数学家、牧师热尔贝（Gerbert，约950~1003），有一个谜语：*Scandit ab R Gerbertius in R, post Papa viget R*（从R·热尔贝上升到R，然后到达颠峰，成为R的教皇）。

[911 年,热尔贝被任命为 Rheim 的大主教;998 年,他被提升为 Ravenna 的大主教;999 年,成为罗马教皇西尔维斯特二世。]

从哈米尔顿到哈代

在《走进数学圈》,我们按字母顺序将哈米尔顿和哈代联系在一起,现在也同样在一起。这两个数学家有许多轶事。下面 5 个哈代的故事经允许改编自波利亚"我所认识的几个数学家",发表在《美国数学月刊》1969 年 8 - 9 月号,746 ~ 753 页。波利亚不但是美国一流的集杰出研究者与良师于一身的数学家,而且能讲一流的数学故事。

291° 哈米尔顿怎么上当了?

魏塔克爵士 (Sir Edmund Whittaker) 1906 年出任哈米尔顿 (Sir William Rowan Hamilton) 曾经担任过的职位,他讲过一个哈米尔顿的有趣故事,后来在乡间广为流传。哈米尔顿作为皇家天文学家的职责之一,似乎就是经营他在邓星克 (Dunsink) 天文台附近的 17 亩农田。而哈米尔顿是在城里长大的,不知道怎么种田,但为了让家人喝牛奶,他买了头奶牛。很自然的,奶越来越少,哈米尔顿去问邻居的农民。农民知道来者是谁,就说,那只奶牛是 17 亩地里的惟一牲畜,感觉孤独了。哈米尔顿问,是不是可以给它找一个伴儿。农夫慷慨地答应了,允许他自己的牛在邓星克的那块肥美的牧场上游荡。

292° 哈米尔顿是如何对数学发生兴趣的?

威廉·哈米尔顿不是在父母身边长大的,他一岁的时候就被

送到都柏林30里外的一个小村庄，跟当牧师的叔叔詹姆斯（James）接受教育。叔叔给孩子的教育紧张而不均衡。

威廉真是一个神童。他3岁能读英文；4岁能翻译拉丁文、希腊文和希伯莱文；8岁又新学了意大利文和法文。10岁前，他还学了阿拉伯文和梵文。14岁时，他用波斯文写了首诗，在波斯大使访问都柏林时，当面朗诵给他听。孩子很喜欢古典文学和诗歌。

直到15岁，威廉才改变兴趣，开始喜欢起数学。转变是因为他遇到了美国速算家科尔本（Zerah Colburn，见《走进数学圈》300）。科尔本那时也只是个孩子，在都柏林的一次博览会上表演他的本领。那以后的很长时间里，威廉都在练习心算，并决定将数学作为他的第一选择。

293° 哈米尔顿的闹钟

哈米尔顿16岁时，叔叔早晨5点钟就把他叫醒：他用一根绳子系在孩子的睡衣上，绕过二人卧房之间的墙壁，然后拉动绳子就行了。

294° 哈米尔顿的名言

艾伦坡曾赞叹“光荣属于希腊，伟大属于罗马”，哈米尔顿顺着同样的思路问：“谁愿放弃阿基米德的荣耀而追求统治者马塞卢斯的名声？”

295° 哈代与黎曼猜想

哈代很会写，优美而老练，但他的文章，特别是与里特伍德合作的那些，却不容易读懂。问题很难，方法也就难免复杂。他

很看重文章的清晰，但他在数学中最看重的不是清晰而是力量，去征服别人望而却步的那些巨大障碍。他本人的力量就很强大，对黎曼假设感兴趣。[4]

4 黎曼假设是著名的尚未证明的猜想，它在经典分析中的地位就像数论中的费马大定理。欧拉曾指出素数理论与级数

$$1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + \cdots + 1/n^s + \cdots$$

之间的关系（其中 s 为整数）。黎曼研究了同一个级数在 s 为复数 $\sigma + i\tau$ 的情形。级数和定义了函数 $\zeta(s)$，就是著名的黎曼 ζ 函数。1859 年前后，黎曼猜想函数的所有虚零点都具有实部 $\sigma = 1/2$。1914 年，哈代成功证明了 $\zeta(s)$ 有无穷多个 $\sigma = 1/2$ 的零点，但一个多世纪过去了，黎曼原来的猜想仍然没有证明。（原注）

哈代喜欢阳光，但英国阳光不多。于是，等板球赛季一结束，他暑假总是习惯去欧洲大陆看朋友。他最主要的朋友是哈拉德·玻尔（Harald Bohr）。他们见面例行公事似的，先坐下聊天，然后出去散步。他们一坐下，就决定好日程并写下来。日程的第一点总是相同的："证明黎曼假设"。当然，这一点没能实现。尽管如此，哈代仍然坚持每次都要把它写出来。

296° 哈代批评波利亚

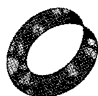
在和哈代一起的工作中，我［波利亚］曾有过一个想法，他很赞同。可接下来，我用功不够，没能实现那个想法，哈代很失望。当然，他没对我说过。后来，他和莱斯（Marcel Riesz）一起在瑞士逛动物园。一只熊关在笼子里，笼子有一道门，门上有一把锁。熊嗅了嗅锁，用爪子去抓，然后叫嚷一阵，转身走开了。"它就像波利亚，"哈代说，"有很绝妙的想法，却不能实现它。"

297° 哈代与运动

哈代对各种事物都有独到而明确的看法。他喜欢猫，却不能容忍狗；他喜欢板球，但讨厌划船。

哈代成了剑桥人，但有段时间是牛津的教授。据说在牛津时，有个不熟悉他怪癖的人问他，"体育比赛时，你站在哪个大学一边？"

"那要看什么比赛了。"哈代说，"如果是板球，我在剑桥一边；如果是划船，我在牛津一边。"



298° 哈代斗上帝

哈代相信上帝是他个人的敌人。原因很简单：上帝除了令哈代烦恼，没做什么事情。有许多故事讲哈代与上帝“斗智”。下面的一个是最有名的：

哈代和玻尔在丹麦，直到暑假结束。等他不得不回英国上课时，只有一只小船了（那时还没有飞机）。北海有时很暴烈，小船完全有可能沉没。不过，哈代还是上船了，但给玻尔寄了一张明信片：“我证明了黎曼假设。G. H. 哈代。”

他原来的想法是这样的：如果船沉了，哈代淹死了，人人都会相信他证明了黎曼假设；但上帝不会让他哈代享有那么崇高的荣誉，所以不会让船沉没。[5]

5《告别数学圈》还有另一个版本（A109）。

299° 哈代再斗上帝

另一个夏天，哈代在恩格尔伯格（Engelberg），瑞士的一个阿尔卑斯山谷，我们在那儿搭了小木屋。他喜欢阳光，但老天一直下雨。我们无事可做，四个人就打桥牌：哈代（他是桥牌高手）、我妻子、我和我的一个朋友（数学家兼哲学家的冈瑟（F. Gonseth））。不一会儿，冈瑟必须走了，他要赶火车。我听哈代对冈瑟说，“火车开动时，请打开窗户，伸出头去，仰望天空，然后大声喊‘我是哈代。’”

他的心思是，如果上帝认为哈代离开山谷了，就会偏给那儿带来好天，气气哈代。

300° 哈代和镜子

哈代的一个怪癖是讨厌镜子。他住的地方不能有任何镜子。

他进旅馆房间做的第一件事情就是把镜子扣过来，或者拿毛巾把它遮住。

301° 国际认同

在法国的一个数学家大会上，一个法国数学家迎接里特伍德："看来还真有一个里特伍德，而不是哈代用来发表臭文章的假名字！"（韦恩）

从海尔布隆到赫尔维茨

302° 年纪

我和海尔布隆（Heilbronn）在三一学院共进午餐，话题转到葡萄酒。我说我很高兴出生在波尔多红葡萄酒大丰收的那年。海尔布隆想了一会儿，说，"噢，我想你应该更老吧。"（鲍斯）

303° 不大可能的思想

希尔伯特教授穿着一只雪鞋，手里还拿着一只裂了口的，一瘸一拐走在雪地上。有人问怎么不把另一只也脱下来，他说还没想到呢。（I. A. Barnett）

304° 希尔伯特和黎曼假设

[这个和下一个故事，经允许改编自波利亚（George Polya）的趣文"我所认识的几个数学家"，发表在《美国数学月刊》1969 年 8 -9 月号，746 ~753 页。]

德国流传着一个关于腓特烈大帝一世巴巴罗萨（Barbarossa）的传说。德国百姓喜欢巴巴罗萨，他死于一次东征，埋在遥远的墓穴里。传说他还活着，沉睡在基法塞尔（Kyffauser）山的一个洞里。只要德国需要他，即使千百年后他也会苏醒过来。

有人因此问希尔伯特，“假如你能像巴巴罗萨那样复活，那么500年后你会做什么?”“我想问，”希尔伯特说，“有谁证明黎曼假设了吗?”

305° 希尔伯特心不在焉

希尔伯特在家集会，夫人发现丈夫忘了穿新衬衫。“大卫，”她严厉地说，“上楼去把新衬衫穿上。”希尔伯特结婚多年，很听话地上楼去了。可他没下来。五分钟过去了，十分钟过去了，大卫还没出现。夫人走上楼，看到希尔伯特在床上睡着了。是啊，这是很自然的过程：他脱下外套，取下领带，然后脱下衬衫，接着就上床睡觉。［《走进数学圈》有个类似的牛顿故事（194）。］

306° 希尔伯特接待新教授

做哥廷根教授群体的新成员，需要正式向同事做自我介绍。他要穿着黑色外套，带着大礼帽，乘坐出租车绕过每个成员的家。出租车停在每家前面，新同事在门口递上他的名片。有时他会听说某某教授先生不在家，如果在，他可以进屋来聊几分钟。有一次，新教授来到希尔伯特的家门口，希尔伯特决定（或者希尔伯特夫人替他决定）说他在家。于是，新教授走进屋来，坐下，把帽子脱下放在地板上，开始谈话。谈话是应该的，可他谈个没完。也许数学思考被打断了，希尔伯特越发感觉不耐烦。

那他后来怎么办呢？他站起来，从地板上拿起礼帽，戴在自己头上，碰了碰夫人的胳膊，说，“亲爱的，我想我把柯里奇（Kollege）先生耽误太久了。”——说着走出了自己的屋子。

307° 欧几里得的《原本》和希尔伯特的评价

写于公元前300年左右的欧几里得《原本》的伟大掩盖了希腊数学的古代来源，因为这部著作明显超越了众多的古希腊数学作品，所以更老的著作都被丢弃了，散佚了。正如希尔伯特说的，“看一部科学著作使多少更老的作品成为多余，就能估量它的价值。”

308° “抓数”

纽约市数学教师协会和数学系主任协会联合在哥伦比亚大学举行午宴和座谈会，拉瓦蒂（Julius Hlavaty）向一群教师（其中包括哥伦比亚大学师范学院的克拉克（John R. Clark））讲了下面的故事：

“我四岁的儿子骄傲地拿来一本克拉克教授的初等算术课本。孩子已经做完了两个整数的加法练习，我惊奇的是，一半多的答案都是正确的。我儿子能识字，但除了数数而外，对数字一无所知。他说习题太简单了。习题的标题是‘含4的加法’。他说，‘如果题目里没有4，我就用4来当答案！’”（韦恩）

309° 格言家

[这个和下一个故事，经允许改编自波利亚的趣文“我所认识的几个数学家”，发表在《美国数学月刊》1969年8～9月号，746～753页。]

赫尔维茨（Adolph Hurwitz，1859～1919）的研究风格很像费叶。克莱因（Felix Klein）在《19世纪数学史》中称赫尔维茨是“格言家”。格言有力而简短，但创作者可能要费很长时间才能使它如此精简。赫尔维茨的论文就像一些格言。他在渊博的数学知识里选出确定的一些重要问题，找出简洁的解决方法，并以完美的形式表达出来。如果你想看一个比较容易理解的例子，可以看他文集里的一篇两页的文章——证明e是超越数。

310° 痛苦不堪

我从没听见赫尔维茨在公众面前说过一句尖锐的话。不过在他的家庭或好朋友圈子里，他也说些刻薄或机智的话。在引他的话之前，我必须先说两句。为了认真履行作为一个教授的职责，他带了很多博士生，以极大的热情和耐心关怀他们。其中还有些需要很多帮助的同学，赫尔维茨再有耐性，也忍不住说，“一篇博士论文就是教授在令人生气的条件下写的论文。”

从卡斯纳到劳伦斯

311° 学生行为

在纽约市数学教师和系主任联合举行的午宴上，时为哥伦比亚大学亚德里安（Adrian）数学教授的卡斯纳（Edward Kasner）讲了一个亚德里安（Robert Adrian）的故事：

“亚德里安从罗格斯（Rutgers）来到哥伦比亚时，尽管学问很大，还是发现和罗格斯有同样的学生修养问题（包括乱扔纸屑）。别人问他哥伦比亚的学生比罗格斯的如何，他冷冷地指

出，哥伦比亚的学生看起来目标更高远。”（韦恩）

312° 真子集



在纽约洛克菲勒中心的西蒙-舒斯特（Simon & Schuster）出版公司有着美国最迷人的办公室。刚成立时，请卡斯纳巡视大楼。“这是世界上最现代的办公室。”舒斯特说。卡斯纳说他不信。舒斯特坚持说，“在整个文明世界最现代的办公室。”“噢，文明世界，”卡斯纳教授说，“那范围可就小多了。”（韦恩）

313° 希望的态度

一天，卡斯纳教授班上的一个同学在黑板上写一个证明，最后一行就得跪着写了。“那正是我老在思考的问题，”卡斯纳教授说，“数学中确实有一点儿祷告的成分。”（曼海姆）

314° 自我引用

大家都知道克雷加托（Kerekjarto）那本有贝塞耳-哈根（Bessel-Hagen）照片的拓扑学书，而很少有人知道，书中尽管包含了很多克雷加托本人的见解，但在索引中只有一处涉及克雷加托。如果拿书来看，你会发现根本没提克雷加托的名字，而只写了一个脚注：“Diesen falschen Satz habe ich bewiesen.”（“这个错误的定理是我本人证明的。”）（鲍斯）



1920 年一个数学会议上拍摄的照片。左起，后排：Issai Schur，George Pólya，Erich Bessel-Hagen。中间：Béla Kerékjártó，L. E. J. Brouwer，Otto Szász，Edmund Landau；前排：Hans Hamburger。

315° 变换

科尔琴（Ellis R. Kolchin）教授在哥伦比亚大学上课，开始讲“偏序”、“单序”、“全序”等十来种“序”。一个学生迟到了，坐下后问他的同桌，“科尔琴在干吗呢？”

“他正在从有序制造混乱。”同学回答。（韦恩）

316° 拉格朗日的格言

拉格朗日曾说，假如一个数学家不能把他的思想清楚地解释给在大街上遇到的第一个人，他就不算彻底理解了自己的工作。尽管这理想常常不可能实现，随着时间的流逝，它还是可以把握的。牛顿的万有引力定律起初对受过高等教育的人来说也很难理解，今天已经成为常识了。爱因斯坦关于引力的相对论正经历着相同的转变。

317° 天体的奇迹

拉格朗日得到了三体问题的一些特殊解。其中一个假定三个物体从等边三角形的三个顶点出发，他证明，三个物体在这种情形下将继续固定在三角形运动，只是三角形绕着它们的质心旋转。这个特殊解似乎没有现实意义，但1960年发现了它适用于太阳、木星和名叫阿基里斯的小行星。

318° 一致还是不一致？

尽管拉普拉斯的数学和科学才能赢得了一致的赞誉，他的政治投机却备受争议。他被公认为投机分子，玷污了他的忠诚。人们常拿他来跟“布雷的牧师”（Vicar of Bray）比较，因为那牧师是个善变的人，两度为天主教徒，又两度为新教徒。但他替自己屈从于环境的行为辩解说，“不是那样的，尽管我改变了宗教信仰，但我仍然坚持自己的原则，就是生和死都要像布雷的牧师。”[6]

6《布雷的牧师》是19世纪英国的一出两幕喜剧；另外流传着一首诗，说布雷的牧师圆滑善变，曾在5个君主的手下做牧师，还很“原则”地说，“不论哪个君王统治，我还是布雷的牧师。”

319° 拉普拉斯最后的话

拉普拉斯死于1827年，据说他最后的话是，“我们知道的很少，我们无知的很多。”而德摩根转述的拉普拉斯的话却是，“人只是跟着幻影走。”

320° 作为科学的数学

在缅因州路易斯顿（Lewiston）贝茨（Bates）学院召开的一个科学和数学教授委员会会议上，化学系的劳伦斯（Walter Lawrence）博士说，“现在，物理学、化学、生物学和数学——如果



数学能认为是科学的话……” 这时，数学系主任打断了他的话，说，“劳伦斯博士，仅仅因为数学不发出臭味和不冒泡，是没有理由不把它看做科学的。”

从米勒到牛顿

321° 把握重点

在库珀学会（Cooper Union）的微分方程课上，米勒（Frederic H. Miller）教授讨论钢梁在荷载下的扭曲。一个学生问，“假如一个问题没说到点子上，结果会怎样?”

“那说明你会从梁上掉下去。” 教授回答。[7]（韦恩）

7 这儿又是文字游戏。学生原话 “a problem in which the point falls outside the range of values” 是想挖苦老师的问题没有价值，但 “point falls outside the range of values” 也可以理解为方程的解落到了某个数值范围以外，老师就是抓住这一点回答的。

322° 绝技

苏族瀑布（Sioux Falls）学院的米尔斯（C. N. Mills）教授为了表现他的计算绝技，决定在直角坐标系下直接计算与 3 个已知圆相切的 8 个圆的半径。1961 年 2 月，他计算完了。全部计算连同草稿贴满了一张 24 英尺长的 18 英寸墙纸！

我们想起一个类似的故事，大约在 1894 年，林根（Lingen）的一个叫赫尔墨斯（Hermes）的教授用了 10 年时间来构造正 65 537 边形。（见《走进数学圈》178。）

323° 邻域问题

邻域问题出现在牟比乌斯（August Ferdinand Mobius）和朋友维斯克（Adolph Weiske）的一次讨论中。它也许来自维斯克，尽管他不是职业数学家，却对数学问题和疑难感兴趣。牟比乌斯

在1840年的一个演讲中第一次提出了这个问题，还讲了下面的童话：

从前，在远东生活着一个国王，他有五个儿子，他们将在国王驾崩后继承王位。国王在遗嘱中规定，他的王国将分成五部分，每一个都必须与其他四个毗邻。因为老国王担心，假如不这样分割，一个兄弟去访问另一个就不得不经过他人的国土，兄弟就可能变得疏远。另外，国王还规定，每对兄弟必须修筑连接他们土地的马路，而这些道路必须分开，不能穿过第三者的领地。国王死后，五弟兄费了很长时间来遵照父亲的遗愿分土地，但他们的努力都失败了。

难怪弟兄们完不成任务，因为平面（或球面）上相互毗邻的区域的最大数目，等于平面（或球面）上能用相互不相交的简单曲线连接的点的最大数目，而那最大数等于4。

324° 父与子

牟比乌斯有个儿子是著名神经学家，写过一本关于“女性生理智力缺陷”的书，比父亲的任何一本更“健全”的数学书，赢得了更多的关注。

325° 茶－糖问题

很久以前的一个夏天，在芝加哥大学的一次午宴上，著名英国数论专家莫德尔（Louis Mordell）教授问，“你如何将14块糖放进3杯茶，让每个杯子有奇数块糖？”等了一会儿，他公布了答案：“第一个杯子放1块，第二个杯子放1块，第三个杯子放12块——把12块糖放进一个茶杯里，确实是一个奇怪的数！”（I. A. Barnett）

326° “平凡”

我曾参加过莫尔斯（Marston Morse）的讨论班，正碰上汤姆金斯（Tomkins）在讲一篇论文。他说，“这是平凡的。”莫尔斯打断他，冷冷地说，“平凡的理由是什么？”结果费了半个小时才得到那个结果。[8]（鲍斯）

8 在数学论证中，“平凡”指那些普通而明显的例子。花半个小时推导出来的结果当然不能算“平凡”。

327° A 与 B 的关系

1919 和 1920 年间，莫尔斯和我是哈佛的佩尔斯（Pierce）学者。那时，数学家习惯一周聚会一次。演讲后有点心。看门人带着软饮料、干酪等东西进来，等大家都走了才离开。一天，莫尔斯问看门人他从谈话学会了什么，看门人回答，“一半的时间在证明 $A>B$，另一半时间在证明 $A<B$，而所有时间里大家都知道 $A=B$。”（I. A. Barnett）

328° 牛顿记账

斯宾塞（Rev. J. Spence）在《书与人的故事、观察和特征》（1858）中，对牛顿做了如下有趣的评论：“牛顿爵士尽管精于代数和流数，却不能熟练地做普通的账目：他在做造币总监时，常请人替他记账。”

329° 牛顿的墓志铭

一个人，凭他如神的思想力量，第一个解释了行星的运动和图像、彗星的轨迹和海洋的潮汐。

330° 威尔逊谈牛顿和莎士比亚纪念碑

威尔逊（John Wilson，1741～1793）还是剑桥大学本科生

时，就发现了今天以他名字命名的一个初等数论定理（如果 p 是素数，则 $(p-1)!+1$ 是 p 的倍数）。他很早就有了这个发现，而且在 1761 年成为剑桥数学荣誉考试的尖子，但他后来没能在数学领域做出更多的重要事情。在评论牛顿和莎士比亚的纪念碑时，他写道，“一块牛顿的碑！一块莎士比亚的碑！仰望苍穹——看透人类的灵魂。直到行星和激情——爱和恒星都消失了——他们的名字永远不死。”

331° 蒲伯和希尔歌唱牛顿

蒲伯（Alexander Pope）为牛顿写了一首墓志铭式的小诗：

自然和自然律隐藏在黑暗，
上帝说，“让牛顿来！”于是星光灿烂。

后来，希尔（Aaron Hill）略作改动，在他的《赞牛顿》中写道：

上帝给自然律盖上黑暗的面纱，
牛顿燃烧了灵魂——天地一片光华。

从皮亚诺到斯威夫特

332° 皮亚诺曲线

1890 年，皮亚诺（Giuseppi Peano）构造了第一条通过正方形每一点的连续曲线，从而说明连续曲线不一定是一维的，而能

填满整个平面。这种曲线由无穷曲线序列的极限来确定。皮亚诺家白色台阶上镶嵌的黑色瓷砖，就是序列中的一条曲线的花样。

罗德岛（Providence）学院的肯尼迪（Hubert C. Kennedy）教授说，卡西纳（Ugo Cassina）曾证明那是真的，还告诉我们皮亚诺用的什么曲线。皮亚诺的侄女还向他保证，她见过那个图样。然而，肯尼迪教授本人几年前访问意大利时，连那所房子也没找到。已故的特拉契尼（Alessandro Terracini）在自传里说，他也没能找到房子。

皮亚诺曲线有无穷多个重复的点。后来，希尔伯特（1911）、谢尔宾斯基（Waclaw Sierpinski，1912）和其他一些人构造了没有重点的平面填充曲线。图30（a），（b），（c）展示了希尔伯特曲线的前3阶近似 p_1，p_2，p_3。

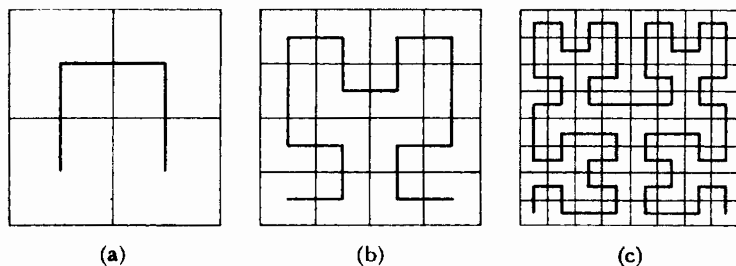


图30

希尔伯特曲线 p 由序列 p_n 的极限确定：

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n$$

和皮亚诺曲线一样，三阶近似的希尔伯特曲线可以用瓷砖做成迷人的台阶，也可以做成花园的围栏。

333° 应得的惩罚

下面的故事发生在我编辑《数学评论》的时候。我们收到



一篇马克兰（R. A. MacFhraing）用盖尔语（Gaelic）写的论文。我检阅审稿人档案，发现懂盖尔语的只有一个人，兰金（R. A. Rankin）。于是我把论文寄给他。不久后，我收到了评审意见，还附了一句话："我想你应该发现文章到底是谁写的。"我这才恍然大悟：MacFhraing 就是 Rankin 在盖尔语的拼写方式（读音也近似 MacRank）。我把评论印出来了（你可以去看索引），写信给兰金说，那是他应得的惩罚，用盖尔语写文章，只好自己评审自己了。（鲍斯）

334° 观点

1945 年夏，里特（Joseph Fels Ritt）教授给哥伦比亚大学的学生上第一堂函数论课。在黑板证明写完后，他退一步问，"我写清楚了吗？谁还有问题？"

"里特教授，"一个同学抱怨说，"你挡在黑板前，我看不见你在解释什么。"

"是啊，"教授冷冷地说，"我能让自己讲清楚，却不能使自己透明。"（韦恩）

335° 罗素的噩梦

罗素（Bertrand Russell，1872 ~ 1970）讲过他做的一个噩梦。在梦里，他身在不列颠博物馆的大图书馆，一个管理员拿着处理废书的大桶，在书架间的走道里慢慢地走上走下。他从书架上取下书，判别一会儿，然后放回书架或者扔进大桶。最后，管理员从书架上取下了罗素和怀特海的不朽巨著《数学原理》。从作者看来，这部书令他们精疲力竭，而梦里的罗素大概知道这是世界上仅存的一套了。管理员看看题目，似乎想把它扔进大桶，

然后改变主意，想要放回书架，可又有点儿犹豫，想把它扔了，正犹豫着——恰好这个时候，罗素从梦里惊醒了。

336° 秦始皇因何焚书？

公元前213年，秦始皇下令焚烧所有的知识性图书，包括数学和相关题目。他知道很多学者不愿烧自己的书，又下令凡不服从命令者，将在身上烙下印迹并发配长城服四年劳役。即使这样，还是有460个学者团结起来反抗，皇帝为了惩罚，把他们活埋了。

那么，秦始皇为什么犯下如此荒唐而无人道的罪行呢？据说，他自以为高贵伟大，想让人们记住他是所有皇帝中最伟大的。另外，他还特别想在历史上留下一个好名声，在他的统治下知识迅速增长。为了达到目的，他想的奇异方式就是把所有的书都烧了。他的想法是，如果未来的几年整个中国都没有在他统治之前写的书，而所有的书都是在他的统治下写成的，那么后世的人们会认为知识是从他开始的。[9]

337° 用词不当

斯特洛伊克博士（现在是麻省理工学院荣誉教授）在《数学简史》第一版第28页提到“失望的（frustrated）金字塔的体积”。把金字塔顶切去，才真够令人失望的（frustrating）。不过，本书修订第三版里，这句话还是改成了“去掉塔顶的金字塔的体积”。

338° 看书的人

哈佛大学斯特恩伯格（Shlomo Sternberg）博士讲了一个数学

9 关于焚书的原因，《史记·秦始皇本纪》是这样记载的：

丞相李斯曰：“五帝不相复，三代不相袭，各以治，非其相反，时变异也。今陛下创大业，建万世之功，固非愚儒所知。且越言乃三代之事，何足法也？异时诸侯并争，厚招游学。今天下已定，法令出一，百姓当家则力农工，士则学习法令辟禁。今诸生不师今而学古，以非当世，惑乱黔首。丞相臣斯昧死言：古者天下散乱，莫之能一，是以诸侯并作，语皆道古以害今，饰虚言以乱实，人善其所私学，以非上之所建立。今皇帝并有天下，别黑白而定一尊。私学而相与非法教，人闻令下，则各以其学议之，入则心非，出则巷议，夸主以为名，异取以为高，率群下以造谤。如此弗禁，则主势降乎上，党与成乎下。禁之便。臣请史官非秦记皆烧之。非博士官所职，天下敢有藏诗、书、百

家语者，悉诣守、尉杂烧之。有敢偶语诗书者弃市。以古非今者族。吏见知不举者与同罪。令下三十日不烧，黥为城旦。所不去者，医药卜筮种树之书。若欲有学法令，以吏为师。"制曰："可。"

研究生的故事：他在（约翰霍普金斯大学附近的）酒吧要了杯啤酒，喝酒时顺便把一本高等数学的书放在了吧台上。另一个客人看见题目上的"数学"一词，就拿起书来浏览了一遍，"哎呀！"他叫喊道，"我好多都忘了！"（韦恩）

339° 斯特姆和他的定理

斯特姆（Jacques Charles Francois Sturm，1803 ~ 1855）生长在瑞士日内瓦，在索伯尼（Sorbonne）继任了泊松（Poisson）的数学职位。1829 年，他未经证明地发表了他的著名定理，说明一个给定的实系数多项式方程在给定数值区间有多少个实根。斯特姆的这个发现，彻底从理论上解决了自笛卡儿以来方程理论中的一个长期困扰大批杰出数学家的难题。定理的证明是由艾丁豪森（Andreas von Ettinghausen）、乔奎特（Charles Choquet）和梅叶（Mathias Mayer）以及斯特姆本人分别在 1830 年、1832 年和 1835 年提出的。这个发现费了斯特姆的很多心力，他当然有理由为自己的成绩感到自豪。当他在演讲中要谈那个定理时，他常说，"现在我们来看我的名字的定理。"

340°《格利弗游记》的惊人预言

[下面的文字经允许改编自伊弗斯的同题文章，发表在《数学教师》杂志"历史记述"专栏，1961 年 12 月，625 ~ 626 页。]

在《飞岛游记》里，[10] 斯威夫特（Dean Swift）借格利弗之口，报告了飞岛人的惊人成就。格利弗说（部分）：

10 A Voyage to Laputa，《游记》的第三部分。

> [飞岛的天文学家] 大部分时间都用来观察天体，他们借助的望远镜远远超过了我们的精度……凭这样的工具，他

> 们的视野远远超过了我们欧洲的天文学家，他们编了10万颗恒星的星表，而我们最大的星表也不及它的三分之一。他们还发现了两颗较小的星体，即环绕火星的卫星，最里面的一颗距离母行星正好为直径的三倍，外面的一颗距离五倍。前者在空间十小时环绕一周，后者二十一个半小时一周。所以，它们周期的平方非常近似地正比于它们到火星中心的距离的立方，说明它们服从相同的也影响其他天体的引力定律。

在继续讨论之前，我们注意《格利弗游记》（*Gulliver's Travels*）最初发表于1726年。

1877年，《格利弗游记》发表150年后，美国天文学家霍尔（Asaph Hall）利用当时最好的华盛顿海军天文台的26英寸望远镜发现火星有两颗卫星。这些卫星的直径大概不超过10英里，距离火星又近，只有用大望远镜而且在恰当的时间才可能看到。这样的望远镜要等《格利弗游记》发表一个多世纪之后，才能制造出来。

霍尔将两颗卫星命名为火卫一（Phobos）和火卫二（Deimos）。火卫一是内卫星，7小时39分完成一周天，距离火星中心大约5 800英里，距离火星表面3 700英里。火卫二30小时18分一周天，距离火星中心14 600英里。火卫二比火卫一小，亮度大约只有它的三分之一。

关于这些惊人的巧合，奥利佛（Charles P. Olivier，宾夕法尼亚大学弗劳尔和库克（Flower and Cook）天文台前台长）写道，“当我们注意到斯威夫特离真相那么近，不但预言了两颗小卫星，还预言了轨道的重要特征，几乎可以毫不怀疑地说，这是

过去千年来最惊人的‘预言书’，其真实性没有一点儿疑问……［火卫一］的周期小于 8 小时，因而从西方升起，在东方落下。从这一点说，它是宇宙迄今所发现的所有天体中最独特的一个。而斯威夫特连这个事实也预言了。”

它带来的惊奇还远没有结束，因为同样的两颗卫星，在伏尔泰（Voltaire，1694～1778）的《米克罗梅加斯》（*Micromegas*）里也出现过！

从西尔维斯特到怀特海

341° 西尔维斯特早年的一段经历

在西尔维斯特（Sylvester）早年的艰难岁月里，很多学生私下跟他学数学，其中最有名的是一个叫南丁格尔（Florence Nightingale）的女青年，后来成为闻名世界的医院护理改革家。西尔维斯特那时 30 多岁，南丁格尔小姐小他 6 岁。1854 年，西尔维斯特不再靠做私人老师谋生了，同年，南丁格尔也离开英国去了克里米亚的战场。

342° 西尔维斯特晚年的一段经历

西尔维斯特晚年时对数论发生了兴趣，想把椭圆函数用于其中的某个部分。可他对椭圆函数一无所知，就请了一个年轻人来教他。几节课下来，西尔维斯特就放弃努力了，反过来给年轻人讲他最近的代数发现。

343° 数学亚当

在《自然》杂志第 37 卷（1887 ~ 1888）162 页，西尔维斯特真实地写道，“也许我可以冒昧地要求得到数学亚当的称号，因为我相信我给数学理性产物起的名字（已经广为流传了）比当代其他数学家加起来还多。”

卡斯纳教授也许可以称为更近代的数学亚当。

344° 西尔维斯特的论文

西尔维斯特写文章很费力。他的字很难看，给印刷工带来很多麻烦。一篇给杂志的文章几乎很难脱手，他要给印刷工写一张修改、校订和增补的单子。后来，还会给编辑和印刷工寄一些邮件，进一步说明他的东西。

345° 作为教师的西尔维斯特

西尔维斯特是最不讲方法的老师。他宣布“要做三次新泛代数的讲座”。在第三讲的最后，他必须扩展到 12 讲。结果，这个学年余下的时间都用来讲新泛代数了。

第二年，他要开一门置换理论课，用纳托（Netto）的书。所有学生都买了课本，前三课西尔维斯特也是老实地照那本书讲的。接着他对某些矩阵问题感兴趣了，宣布他每周要讲一节矩阵。后来发现一节课不够，两个多星期后他就把纳托忘在脑后，而且再也没讲过。

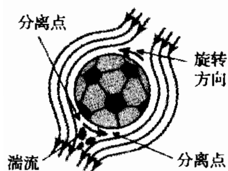
有一次，他走进来说，“有个值得注意的定理，我还没证明，但我感觉它绝对是正确的。下面是它的一些结果。”下一堂课时，他宣布上次说的那个值得注意的定理是错误的，又提出一

个绝妙的修正，从它得出了美妙的结果。

学生坐在下面，看着数学如何从熔炉里火热地产生出来。

346° 高尔夫球的数学

泰特（Tait）喜欢玩儿高尔夫，第一个用数学来研究高尔夫球的飞行。他对球的长距离飞行的解释，起初还遭到过嘲笑。他证明了旋转是一个重要原因。“从球顶击球时，球的上部比中心向前运动更快，从而球的前部因旋转而下沉，球也就沿那个方向倾斜。从球的下面击球时，球沿相反方向旋转，结果球将向上而不是向下偏转。尽管有重力的影响，向上的趋势也通常使球的路径（在整个过程的一部分里）上凸。”正是从下向上的旋转延长了飞行距离和时间。如果没有旋转，球不可能克服重力而飞得很远，但有了旋转，它就能飞出相当的距离。



足球在空中的运动状态

泰特很为高尔夫得意，但霍姆赫兹（Hermann Helmholtz）来苏格兰访问他时，却“看不出那些小洞有什么意思”。泰特的一个儿子后来成了卓越的高尔夫球手。

347° 汤姆逊和高地老人

汤姆逊在他的《开尔文勋爵的一生》（1910）中，转述了开尔文本人在三一学院用餐时讲过的一个有趣故事。

一个高地国家的少年进了大学，而且功课似乎很好，期末获得了数学和物理学的奖学金。小伙子的老父亲离开农场，来到学校看儿子领奖。威廉·汤姆逊教授（即后来的开尔文勋爵）领着老人参观校园。“哦，汤姆逊先生，”老人问，“我儿子得奖的那个数学是做什么的?”教授告诉他，数学是计算，是用数字来思考。“唉，”老人说，“那他应该跟我学啊。我过去可是个算账

高手呢。”接着他问，“汤姆逊先生，那形而上学又是什么呢?”教授费力向他解释了形而上学如何表达不确定的东西。“唉,”老农夫说，“也许他该跟他妈学；她就是经常胡言乱语的人。”

348° 汤姆逊和学生

开尔文勋爵有一天不能去上课,就在教室门口贴了一个通知：“汤姆逊教授今天不来上课（classes）。”

到了教室的学生想玩儿恶作剧，就把字母“c”抹去了，通知变成：“汤姆逊教授今天不见情人（lasses）。”

第二天，等着看笑话的同学们懊丧地发现，教授还是比他们聪明，现在的通知是：“汤姆逊教授今天不见蠢驴（asses）。”

349° “头衔”

泰特给麦克斯韦（James Clerk Maxwell）的绰号是 dp/dt，因为在热力学中 $dp/dt = JCM$，其中 C 为卡诺函数。而麦克斯韦用 T 表示汤姆逊，用 T' 表示泰特，于是，汤姆逊和泰特的《自然哲学论》就被称为《T 与 T'》。

350° 数学家是什么?

关于开尔文勋爵，有个流传最多的故事：一天，他问学生数学家是什么。他走到黑板前，写下

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

然后转身对同学，指着他写的公式说，“所谓数学家就是，这个公式对他来说，就像二加二等于四对你们一样显而易见。”

351° 冯卡门心不在焉

[下面的故事，经允许改编自波利亚的趣文“我所认识的几个数学家”，发表在《美国数学月刊》1969 年 8 ~ 9 月号，746 ~ 753 页。]

下面的故事是冯卡门（Theodore von Karmen）亲自给我讲的，但我不敢保证它肯定发生过，因为他喜欢精彩的故事，而最好的故事不是发生的，是杜撰的。那时他有两个职位：既是德国亚琛的教授，还在帕萨迪纳的加州理工学院讲课。作为重要的航空工程学家，他身兼多家航空公司顾问，所以，只要其中哪个航线的飞机有空位，他都能自由往来。于是，他能定期或不定期地往来于亚琛和帕萨迪纳。他在两处讲一样的课。有一次，他到帕萨迪纳时感觉有点儿累了，但还是坚持上课。那倒也不难，因为讲义是亚琛讲过的。他讲着讲着，看看周围，才感觉空位子好像比平常更多了。后来才意识到问题在他自己：原来他在讲德语！他感觉很不安：“你们应该告诉我的——你们怎么不说呢？”同学很安静，最后一个同学说，“别介意，教授。你可以说德语，也可以说英语，反正我们都只能懂那么多。”

352° 后来者

值得注意的是，外尔斯特拉斯（世界上最伟大的数学家之一）的大部分时间是在中学教书，直到 39 岁才开始大学教授的生涯，很多数学家到那个年纪已经失去创造力了。他从不后悔那段中学经历，而他也被公认为数学史上一流研究者中最伟大的老师。

353° 迟到

一天早上，外尔斯特拉斯没能准时来布劳恩斯伯格（Braunsberger）高级中学上8点的课，同学们一片喧闹。校长亲自来到外尔斯特拉斯的住处看出了什么事情。他敲门进屋，发现在幽暗的房间里，外尔斯特拉斯正伴着昏暗的灯光工作，全然不知外面已经天亮。忘了时间的外尔斯特拉斯工作了一个通宵。校长告诉他学生们正在吵闹，他请校长原谅，说他很快就会有一个重要的数学发现，他希望能给整个科学世界带来惊奇。

354° 顿足欢呼

在牛津大学，教授讲完一门课时，学生照例会用脚踏地板，表示对老师优美讲课的“回报”。有一次，怀特海讲完最后一课时，同学们踏步热烈，连楼下的天花板都塌了，一个逻辑学教授正在上课呢。那教授说，“我怕这个前提也支持不了怀特海教授的结论！”[11]

这令人想起两个洗衣女，她们常在小巷的两边，倚着窗户吵架。你看，因为她们从不同的前提出发，永远也不可能达成一致。

11 这是一句双关语：“前提”（premises）也有“建筑地基”的意思；而“结论”（conclusion）也指“结束”。在这个场景，“我怕整个大楼也顶不住了”。

维　　纳

多年来，维纳（Norbert Wiener，1894～1964）一直是麻省理工学院（MIT）校园的标志性人物。他真是一个天才，14岁获图夫茨（Tufts）学院学士学位，18岁获哈佛大学博士学位。他的第一个教学职位是在奥罗诺缅因州立大学，在那儿与学生们的“伐木工头脑”纠缠，过了不愉快的一年。后来他到了麻省林恩

(Lynn) 的通用电器公司，然后又到奥尔巴尼 (Albany) 参加大美百科全书。战时他应召到了阿伯丁实验场，从事计算工作。战后，他接受了老波士顿《先驱报》(*Herald*) 特写记者的职位。然后，1919 年，他到 MIT 当老师，重回了研究生涯。除了几年外出，他在那儿度过了后来的 40 年，成为学院受人欢迎的传统。维纳短小健壮，满脸胡须，动作麻利，走路时手里也拿着书看。他的才智和怪癖曾一度融入 MIT 的校园神话，围绕他流传着许多故事和传说。尽管很多事情不可信，但几乎每个故事都有"在现场"的证人。维纳教授有着高度创造力的头脑，是一个多产的作家，天才的语言学家，娱人的演说家，还是一个感情投入的热情的登山爱好者。

355° 维纳泊车

一天，维纳把车停在有许多车的一块大场地上，然后走进隔壁的大楼参加会议。会议一结束，他就出来驾车，可找不到地方了。其实他连车的样子都忘了。于是，他等所有的车都开走，只剩下一辆——就是他的。(默顿)

356° 维纳搬家

维纳搬新家了，邻居还是以前的邻居。维纳夫人知道丈夫总是心不在焉，就仔细给他写了到新家的路线。可下班以后，维纳教授找不到那张纸条了，自然也忘了路线。于是，靠着一些熟悉的东西，他去了从前的家。一会儿，他看见一个小孩儿，就问她，"小姑娘，你能告诉我维纳一家人搬哪儿去了吗?""好的，爸爸，"小孩儿回答说，"妈妈说你可能在这儿，就让我来给你指路。"(默顿)

357° 维纳找词儿

有个流传颇广的故事说，维纳在校园休息室的一张桌子前工作。人们看到他正全神贯注地研究面前的一篇文章。他不时站起来，离开桌子，走几步，然后回到论文前。巨大的智力消耗表现在维纳的脸上，给每个人留下了深刻的印象。他再次从论文旁站起来，在房间里很快走几步，撞在一个学生身上。学生招呼，"下午好，维纳教授。"维纳停下来，盯着他，然后用手拍拍自己的额头，说，"维纳——就是这个词。"然后胜利地跑回桌前，在他正在玩儿的一个纵横字谜上填下"wiener"。

358° 诺比

波利亚曾听到维纳和一个朋友的对话。"答应我，"维纳说，"在背后称我维纳。"[12]

"不，"朋友说，"我们叫你诺比（Norbie）。"

12 这令人想起梅尔维尔（Herman Melville）的《莫比迪克》（Moby Dick）开篇那句著名的话："Call me Ishmael"。

359° 维纳的数学起点

维纳在语法学校的成绩单似乎并不令人满意，那是他的数学生涯的起点。维纳的父亲是哈佛大学斯拉夫语教授，看到儿子的数学成绩那么差，就亲自给他补习数学。孩子发现这门课太容易了，"从那时起我就懒散了，"他后来说，"因为我知道，数学专业比其他任何学科需要的工夫都少。"

360° 维纳教授的一封著名信件

1947 年，维纳教授给我国最大飞机公司的一个研究人员写了封信。那个科学家曾要过维纳的相当广泛而深入的战争研究。



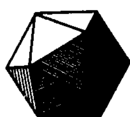
这封题为“一个科学家的反对”的信发表在《大西洋月刊》和后来的许多选本上，它表达了维纳关于科学和科学家在喧嚣世界的立场的许多观点。信的部分内容如下：

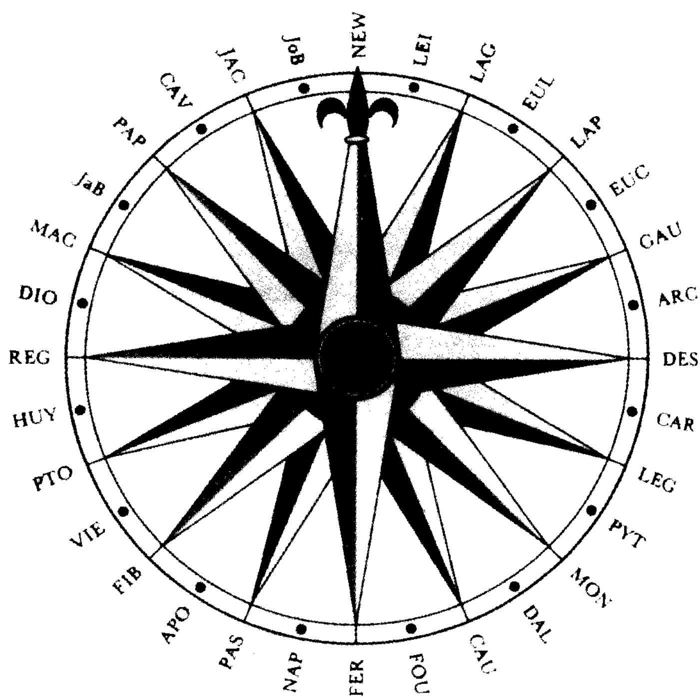
> 政府在战争时期和战后的政策……例如在长崎和广岛的原子弹爆炸，已使人们清楚地看到，提供科学的信息并不是无害的行为，而很可能导致最为严峻的后果。因此，我们不能回避重新审视现有的科学家惯例，考虑是否应该向可能要求他的每一个人提供信息。思想的交流本是科学的伟大传统之一，但当科学家成为生与死的裁决者时，那种交流当然肯定要受到一定的限制。

维纳博士补充说，他将不再发表可能被“不负责任的军国主义者”利用来制造灾难的著作。几个月后，在《纽约先驱者论坛报》上，为了捍卫自己的立场，他宣布不再参加政府研究。他谴责利用科学充当武器，他声称不再参与任何可能导致无辜者死亡的研究计划。

这令我们想起爱因斯坦，在发展氢弹引发的讨论中，出现了一个严峻问题：假如敌对的意识形态诉诸原子武器，世界就可能面临毁灭。爱因斯坦露出恐怖的表情，他用悲伤的声音说，“人们再也听不到莫扎特的音乐了。”

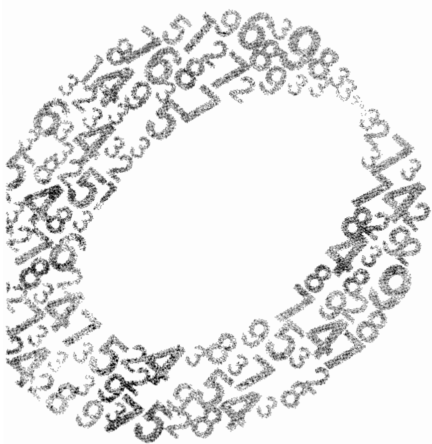
相约数学圈





NEW
LEI
LAG
EUL
LAP
EUC
GAU
ARC
DES
CAR
LEG
PYT
MON
DAL
CAU
FOU
FER
NAP
PAS
APO
FIB
VIE
PTO
HUY
REG
DIO
MAC
JaB
PAP
CAV
JAC
JoB

数学罗盘,R315



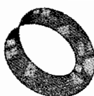
前 言

这是我们绕数学圈的第三次旅行了，而且，至少在一定时间里，它也是我们的最后一次旅行。我不否认，进行这样的旅行是很快乐的，可我还有很多其他的更重要的东西要写，因此我也该把数学故事放在一边了——我收集的故事已经印出有一半多。

除了第一象限和第四象限最后的一点尾巴，本集故事是按地理分类的，这既不同于以时间为序的《走进数学圈》，也不同于以主题归类的《重游数学圈》。

有段时间，我曾打算就数学激发的图案设计专门写一本书。可手头的写作任务太紧了，我只好赶在写那本书之前，在本书的第一象限里写出几十个故事样本。也许有的读者能受到启发，把任务承担下来，写一本更完整更有价值的书。

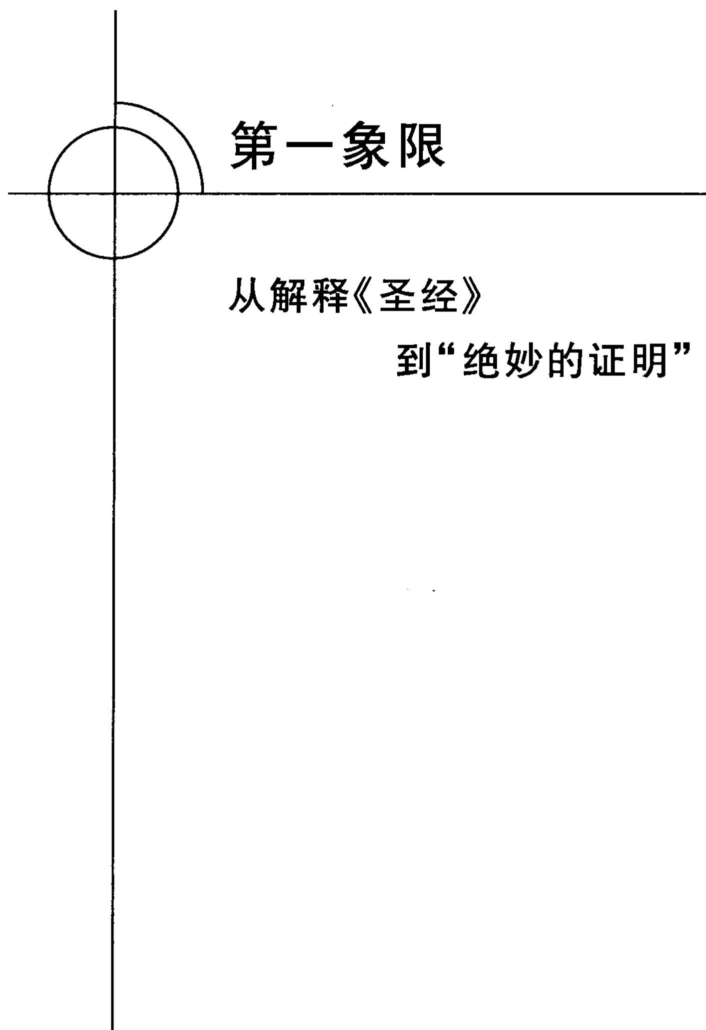
我再次感谢我的同事们，他们表达了对我的数学圈旅行的兴趣，为我提供了各自喜欢的故事。我也衷心感谢其他故事的贡献者和故事来源，名字都写在相应的故事后面了；如果不小心忽略了谁，我请他原谅。我还要特别感谢科学出版社和多佛（Dover）出版集团允许我引用它们的



图书。

和前一次数学圈旅行一样，这一集故事也是我在帮助缅因州立大学戈尔翰学院（第二年）时陆续写出的。第二年访问一结束，我就带着在戈尔翰的两年的美好记忆回到了奥罗诺（Orono）的本部校园。

霍华德·伊弗斯



第一象限

从解释《圣经》到“绝妙的证明”

数字与计算

关于数字和计算，有数不清的故事——很多都有教学意义。下面是前两卷没有的故事，其中几个讲的是一度流行的手指计数，也讲计算板和算盘计算的时代。

1° 圣杰罗姆论马太福音

圣杰罗姆（Saint Jerome，约340～420）出生在伊利亚阿尔卑斯山的一个小村庄。大约34岁时，他开始了在安提奥奇（Antioch）附近沙漠的隐居生活。后来他受命去君士坦丁堡，开始深入研究古代经典。公元386年，他回罗马不久，作为隐士和学生定居伯利恒附近的修道院。凭着渊博的经典知识，他成为早期一流的《圣经》诠释者，他从希伯来文翻译过来的拉丁文本《旧约》至今还是罗马天主教堂官方通行版本。他还参考当时能看到的最好的希腊文本修订了拉丁文《新约》。在丢勒（Albrecht Dürer）的一幅著名绘画中，圣杰罗姆在一间小屋里专心致志地埋头书桌，翻译他的《圣经》。

除了翻译，圣杰罗姆还写过大量《圣经》解说，其中特别有趣的是解说《马太福音》（第13章第8节）关于播种的比喻：

> 但别的种子落在了好土地，结了果实，有100倍的，有60倍的，有30倍的。

圣杰罗姆的解说是这样的：



圣杰罗姆在书房，丢勒，1554

100倍、60倍和30倍的果实，尽管来自同样的土地和同样的种子，数量也可能是不同的。30是婚姻的标志：因为在甜蜜的拥抱中，手指相交，就是这样的方式，它代表丈夫和妻子。

60代表寡妇，因为寡妇饱经一身的烦恼和苦难，正如拇指被下面的食指压迫着。但越多地抛弃曾经的享乐，就能越多地获得奖赏。

但是现在请当心了，亲爱的读者：数字100是从左手转

移到右手，它由同样的手指组成，却不在同一只代表夫妻和寡妇的手。

为了明白这段话，我们必须了解中世纪的手指计数方式。数字30用左手表示，将食指尖放在拇指头上，构成一个所谓“温柔拥抱”的圆，其余手指向外展开。数字60也用左手，用食指头将拇指压在掌中，其余手指向外展开。百位数则用右手。

圣杰罗姆的解说为当时流行的计数方式提供了绝妙的证据，因为对缺乏那些知识的人来说，他的解说都是无法理解的。

今天我们还能看到，“温柔拥抱”的手势被用来代表甜蜜、快乐或成功的事情。

2° 无名指

在古代，人们相信有一根筋脉从心脏直通小指旁的那根手指。于是，那根手指被称作“医生”（*medicus*）；又因为相信它连着心脏，所以它被认为最适合戴各种神圣的环佩。于是它也就成了我们今天“带戒指的手指”（*ring finger*）。在中世纪，手指计数的方法发展并系统化以后，决定第一个完全数6（完全数就是等于其真因子之和的数：6 =1 +2 +3）应该用那个神圣的手指来表示。于是，6就用弯曲左手的无名指来代表。

3° 罗马的手指计数

长者普里尼（Pliny the Elder）死于公元79年，他告诉我们在罗马广场有个两面神杰纳斯（Janus）的塑像。他说，塑像显示杰纳斯的手指代表着一年的365天——他以当时的计数方式，用右手代表300，左手代表65。



4° 颠倒

在罗马的计数中，小于100的数字用左手，而百位数用右手。在阿拉伯，根据从右向左写的阿拉伯手稿看，两只手的作用颠倒过来了。

5° 富还是穷？

一个阿拉伯诗人机智地取笑了另一个富起来了的诗人哈里德（Khalid），他写道："哈里德带着90出去，拿着30回来。"乍看起来，哈里德回来变穷了。但数字90（在阿拉伯）是用右手表示，将食指放在拇指下，构成一个"瘦小的"圆圈。而数字30是将食指和拇指尖连起来，形成一个大的"富有的"圆圈。

6° 拉紧弓弦

一件阿拉伯手稿描述了他们是如何拉弓射箭的：用食指和拇指尖紧拉着弓弦，"就像数字30一样"。

7° 祈祷的姿势

另一件阿拉伯手稿描写了祈祷的正确姿势：祷告者应该把右手放在腿上，做成数字54的样子（就是说，只能伸开食指）。

8° 腓特烈二世谈猎鹰

腓特烈大帝二世（Fredrick II，1194～1250）是著名的知识和艺术的赞助者。他还喜欢打猎，写过一本著名的关于猎鹰的书（《鸟猎术》）。他在书中描述了猎人应该如何抓猎鹰：

抓鸟的手既不向内，也不向外，而是沿手臂伸展的方向张开。然后，将食指向前弯曲，放在伸直的第一节拇指上，就像计算的人用手指做成数字 70 的样子。其余手指向手掌弯曲，支撑食指和拇指，就像数字 3 的样子。于是，食指向拇指弯曲，其余手指在下，就像计算者做成的 73 的样子。

9° 斐波那契和计数

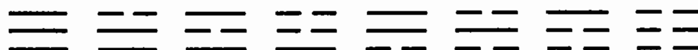
斐波那契是印度－阿拉伯计数系统的伟大鼓吹者，积极推动其位置计数法和方便的算术运算。有趣的是，他也强烈建议保留手指计数法。他发现，手指计数法是暂时保存数字的绝妙方法，这对计算者进行像长除法那样的冗长计算，是非常有用的。

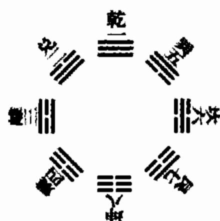
10° 八卦

中国古代经典《易经》里出现了“两仪”（“阴”，— —，和“阳”，——），由此产生“四象”：



和“八卦”：





八卦的名称和方位

每一卦被赋予不同的意思（图 1），从而用来进行不同的预言。

尽管没有历史证据，我们还是可以从八卦看到以 2 为基础的计数方法。假如我们以——为 1 而以— —为 0，则图 1 中的符号从右到左分别代表数字 0，1，2，3，4，5，6 和 7。今天，在

图 1

☰	☱	☲	☳	☴	☵	☶	☷
天	泽	火	雷	风	水	山	地
S.	S.E.	E.	N.E.	S.W.	W.	N.W.	N.

占卜者的罗盘，在扇子、瓷瓶等家用器物以及五花八门的护身符上，我们都能看到八卦。

11° 换一种说法

在二进制计数中，我们用拳头而不用手指。

12° 误会的名字

被称为阿提卡（Attic）或西律王（Herodian）的希腊数字，大约是公元前 3 世纪之前的某个时期发展起来的，形成一个以数字名称的第一个字母构成的以 10 为底的简单计数系统。除了代表 1，10，10^2，10^3，10^4 的符号 I，Δ，H，X，M 外，数字 5 还有一个特殊符号。那个特殊符号是 Π 的古老形式，希腊字 *pente*（5）的第一个字母，而 Δ 是希腊字 *deka*（10）的第一个字母。其他符号可以同样解释。5 的符号常单独使用，也为了缩短记号而与其他符号结合使用。例如，在这样的计数系统下，

2857 = X X 𐅅 H H H 𐅄 𐅃 I I

我们可以看到，5 的特殊符号单独出现了一次，与其他符号结合出现了两次。

在公元前 1 世纪之前，这些数字在阿提卡的铭文、赋税清单和账目中用了几百年，这解释了为什么称它们为“阿提卡数字”。但给这些数字贴上西律王的标签，却是一个误会。因为西律王生在公元 200 年前后的拜占廷，比那些数字的出现晚了 500 多年。然而，西律王是个语法学家，他只是偶然有一次顺便提到过那种数字，就跟他的名字联系上了。

13° 省略号的起源

在梵文中，“零”叫 sunya，意思是“空”；也叫 sunya-bin-du，意思是“空点”，它源于位置计数法（最初在计算板上）中的空位。在书写时，这样的空位用点来表示。现代印刷习惯以三点代表句子或词语的省略，这种习惯可以追溯到印度人用点来代表零的实践。

14° 聪明人与愚人

霍布斯（Thomas Hobbes，1588 ~ 1679）是英国著名伦理学家、哲学家和政治学家，他在他的伟大著作《利维坦》（*Leviathan*，发表于 1651 年，那场把克伦威尔（Cromwell）推上王位的内战刚结束的时候）第一卷第四章里说：“语言是聪明人的算珠，他们只用它来思考，愚人才拿它当金钱。”这显然在说当时的算筹和计算板。

15° 无心的话

在贝莱（Bailey）1725 年的《英语词典》中，我们看到，

“密码就是文人们用来写信的某些奇怪的符号或文字，为的是不让别人看懂。”这大概在无意间流露了时人对印度 - 阿拉伯数字的不信任。

16° 推陈出新

直到16世纪后期，英格兰布里斯托尔市《市长审计报告》的账目都还只用罗马数字，那时印度 - 阿拉伯数字才开始偶尔出现。在1635年的《审计报告》中，最后两页出现了完全的印度 - 阿拉伯数字，但第二年又回到了罗马数字。不过，从1640年开始，就只用印度 - 阿拉伯数字了。

我们从这儿见证了旧风俗逐渐被新习惯所取代，也许奉行传统方法的保守的老职员与聪明的可望引进新的数字形式的年轻人之间，还有过一场小小的斗争。

17° 旧数字的胜利

宣扬印度 - 阿拉伯计数系统的简便运算法则的人，被称为运算家，而坚守罗马数字系统并在算盘上进行计算的人，成了算盘家。运算家与算盘之间的争斗漫长而痛苦。在这场斗争中，算盘家通常被指责为过于保守而害怕改变。当然，很多人自然感觉新数字不那么安全可靠；数字的形式既陌生又没有标准，零更是令人糊涂。在能恰当运用新数字系统前，还有很多东西需要耐心去学。

算盘家对新数字的反驳就更强大有力：新数字太容易被用来行骗了。我们很容易把0改成6或9，把1改成4、6、7或9。其他数字也很好篡改，在记录的数字中间或末尾添加一些数字，也是轻而易举的事情。但是，罗马数字就很难更改，如果遵照老习

惯，把数字写得紧密，结尾用£ 代替 I，在末尾数字上加一短横线，就更不可能被改动了。正因为这些可能的作假，佛罗伦萨市政当局于1299年颁布法令，严禁在金融程序中使用新数字。

18° 薛西斯点兵

希罗多德在《历史》第7卷告诉我们，薛西斯（Xerxes）如何在多里卡斯（Doricus）平原计算他的军队人马的。

> 整个军队的数量，计算出来等于170万。是这样计算的：1万人集合在一处，尽可能紧密地排列起来，然后围着他们画一根线；线画好以后，这1万人散开。然后在线上修筑半人高的石墙，修好以后，其他人进去紧密排列，就这样计算所有的人。

19° 巨石

在《数学学报》（*Mathematical Gazette*, vol. xxxii, no. 300）发表的“大数”一文里，里特伍德（J. E. Littlewood）提到一块1立方英里大而且比金刚石还硬100万倍的巨石。每100年都有个神人来访问巨石，轻轻抚摸它。就这样，巨石经过一段时间以后就消失了。他计算这段时间大约等于10^{35}年，多数人还认为太短了。

20° 过高的不可能

还是在那篇“大数”的文章里，里特伍德指出，人们似乎过高估计了不可能性。为了说明这一点，他说，“不错，过去我听说哈代教授加入了牛津一伙，本来是该惊讶的。但不能说相反的

几率只有 1∶10^6。数学是危险的职业，我们中相当一些人都疯了，因而特殊事件也就相当有可能了。”

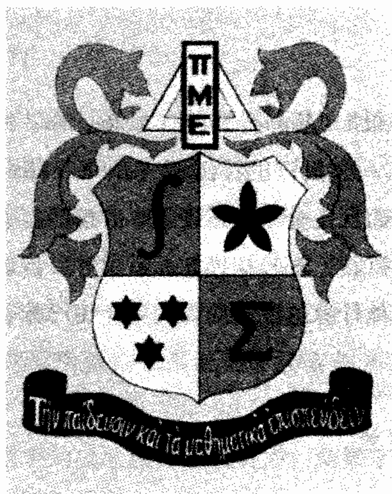
21° 完全数

笛卡儿说：“完全数和完美的人一样稀少。”今天我们只知道 24 个完全数，而笛卡儿时代才知道 12 个。

22° 你不能骗中士

一个高个子新兵正在体检，中士问他身高多少，新兵回答：“5 英尺 17 英寸半，长官。”

“你可不能骗我，小子。我知道你超过了 6 英尺。”中士严厉地说。(*Pi Mu Epsilon Journal*, Nov. 1950, p. 106.)



Pi Mu Epsilon(PME) 是美国荣誉数学学会，1914 年 5 月 25 日创立于锡拉丘兹大学，旨在促进研究机构的学生的数学活动。

23° "最小自然数原理" 的应用

1970 年 2 月 9 日，48 岁的穆瑟（Leo Moser）去世了，是美洲大陆数学的一大损失。他是卓绝而多能的数学家，作者和他有过多年的通信往来。除了严肃的专业工作而外，他喜欢数学的奇趣，经常给朋友寄一些可爱的小花絮。下面的例子，是他在 1957 年 7 月 25 日来信中附带说的：

> 给你说一个老思想的新形式，你可能喜欢。
>
> 问题：最小的完全数是什么？答案：6。这个问题不涉及任何具体数字，但有惟一确定的答案 6。我们能为每个自然数 n 提出这样的问题吗——不提任何具体的数，而惟一答案是 n?
>
> 解：是的！假如存在某些自然数，我们不能提出上面要求的那类问题，那么我们可以考虑如下的问题："我们不能提所要求问题的最小自然数是什么?" 这就产生了矛盾，从而证明了需要的答案。

24° 勒梅的素数表

1914 年，勒梅（Lehmer）列出了从 2 到 10 006 721 的所有素数。那时没有电子计算机，找素数是非常艰巨的事情。10 006 721 是第 664 999 个素数。我们自然想知道，他为什么停在这样一个特殊的素数。原因很简单。他把 1 也定义为素数，因此 10 006 721是他的表中的第 665 000 个素数。他的目标是找出不超过10 000 000的所有素数，每页列 5000 个。在第 133 页他就到了10 000 000内的最后一个素数。然后，为了把那页填满，他一



共列出了（133)(5 000) = 665 000 个素数。

25° 现代数字

我们多数人都留意了用在银行支票上的那些特殊数字（图 2），而且大概也想知道是怎么回事。它们是现在广泛用于自动记账和会计程序的计算机数据处理的一部分。这些数字用含铁磁性物质的墨水印刷，可以通过磁性墨水文字识别(MICR)过程来读取。数字的形状利于计算机识别，也方便我们阅读。

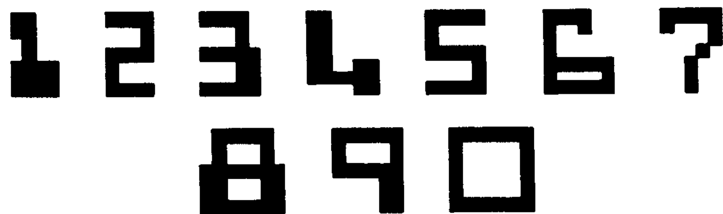


图 2

自动读取方法如图 3（a）所示。支票插入阅读器，它使支票滑过一块永久磁铁，使印刷数字的物质磁化。然后，支票通过阅读器的磁头，它可以感觉每个数字的磁密度，产生相应的输出信号。解译和识别数字，用的是矩阵解码方法。

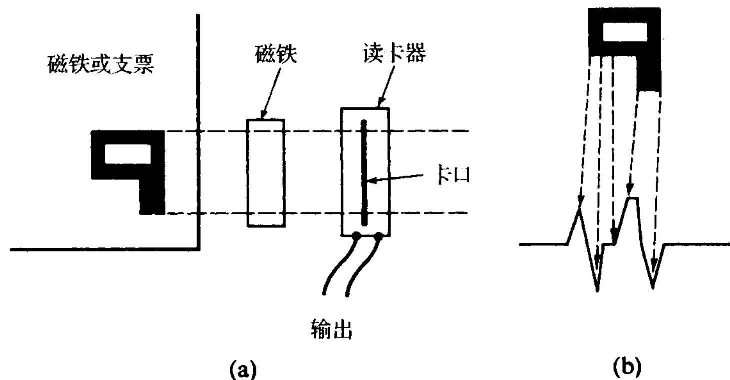


图 3

如图 3（b），输出信号依赖于数字水平和垂直线段的位置和宽度。例如数字 9，当右端的垂直线段靠近和离开阅读器磁头时，会产生相反极性的信号。在水平部分通过磁头的时间内，磁性不发生改变，输出信号降低到零。当左端的垂直线段到达时，将再次出现正负电极的改变。

每个数字都产生不同的信号波形。解码线圈就设计来识别一定信号的特殊形式，从而确定其数值。

26° 为民着想

1970 年 11 月初，订阅格林伍德（Greenwood）出版公司期刊的读者们收到一封信，开头是这样写的：

> 亲爱的读者：
>
> 我想您应该第一个知道，我们已经废弃了计算机——用真人来代替它，他们将有效地处理您的订阅清单。
>
> 因为自动数据处理系统造成的混乱和错误，我知道你们中的很多人没能收到 1970 年全年的刊物，因此我附上邮资已付的回复卡，请您在卡上填写您遗失的期刊，以便我们给您补寄……

收到信的人大概都会长长舒一口气。那个年代，有谁不曾为那些低能的计算机感到厌烦和泄气呢？不论杂志的订阅者还是图书俱乐部的会员，不论邮购东西还是与政府部门打交道（如纳税、社会保险、养老金和医疗保险），所有的人都能讲出一肚子伤心的故事。机器才不会顾及那些解释的信件，它们还将不知疲倦地继续折磨深陷在数字漩涡里的无辜百姓。

27° 语言要求

密歇根州罗彻斯特的奥克兰（Oakland）大学宣布，从1970年冬季学期开始，想学计算机技术语言的学生可以用它替代传统的外语学习。(UPI)

28° 世界的可能希望

常听人说，笔胜于剑。那么，自来水笔也该比自动化的剑更有力量。这样说来，电子计算机应该超过原子弹。

29° 骄傲

一想起人类在世上成功确立的那些普遍风俗习惯，就令人紧张压抑。不过，有一种风俗还是可以鼓吹的——那就是普遍采用印度-阿拉伯数字来计数。在这一点上，我们也许算赢得了一场全世界的思想胜利。

幻　方

幻方源自古代中国，这一点似乎没有疑问。然后，它从中国流传到日本、印度、缅甸、暹罗（泰国）等南方周边国家和马来半岛以及苏门答腊。后来，幻方进入了早期希伯来的神秘作品，又从印度、中国或波斯流传到了阿拉伯国家。占星家们把这种神奇的方块带到西方，影响了欧洲中世纪的数学。幻方的研究也在那儿兴旺起来，一直延续到今天。把幻方和它已知的重要特征集成起来，可以写出好多卷大部头的书。

很多年来，幻方是算命先生的一种把戏。它们曾充当避邪的

象征。它们出现在幸运碗、医药杯和护身符上，为的是躲病驱魔。它们联系着中世纪的炼金术和占星术；它们的魔力和神奇吸引了无数的爱好者，不论大数学家凯莱和维布伦，还是数学的门外汉富兰克林，都曾引领过一时的研究时尚。

30° 几个名词和一个未解难题

所谓 n 阶幻方，指的是将 n^2 个不同整数排列，使任意行、列和主对角线上的 n 个数字具有相同的和，即这个幻方的幻数。如果数字是前 n 个自然数，就说幻方是正规的。在这种情形，可以证明幻数等于 $n(n^2+1)/2$。如果任意行列的数字之和相等，而某个（或每个）主对角线的数字之和不同，就称幻方是半幻的。如果任意两个相对幻方中心对称的数字之和相等，就说幻方是对称的。在 n 阶正规对称幻方的情形，那个和总是 n^2+1。如果不仅主对角线，连折角线的数字之和也等于幻数，就称幻方是泛对角的（或完全的）。最后，假如两个 n 阶幻方不可能通过反射和旋转将一个变成另一个，就说它们是不同的。从一个幻方出发，通过反射和旋转，可以得出 7 个别的幻方。

关于正规幻方和正规完全幻方，最有名的未解之谜也许是在阶数一定的条件下确定那样的幻方有多少个（只计不同幻方的数目）。这个问题已经部分解决了。于是我们知道，3 阶正规幻方只有一个，它不是完全的。4 阶正规幻方有 880 个（不同的），其中 48 个是完全的。罗瑟（J. Barkley Rosser）和沃克（Robert J. Walker）证明，5 阶正规完全幻方有 3600 个，不存在阶数能被 2 除却不能被 4 除的正规完全幻方。因此，没有阶数为 6 的正规完全幻方。我们精确知道的就是这些。5 阶正规幻方的数目肯定要超过 75 万，大约有 1500 万个。我们还知道 7 阶正规完全幻

方超过了3800万，而8阶的超过6.5万亿。

阶数大于3的正规幻方那么多，我们也就容易构造能满足其他或多或少的严格限制条件的幻方。很多人在寻求这些限制下的幻方。

31°《洛书》

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图4

已知最古老的幻方是图4的3×3幻方。它出现在中国最古老的数学经典之一的《易经》中。书的起源已远不可考，而据神话传说，幻方更为古老，是大禹在公元前2200年左右发现的，刻画在黄河之滨的一只神龟的背上。这是所有幻方中最古老、最简单的，也就更多地关联着算命、驱邪、护身和神秘的宗教仪式。中国古代称它为《洛书》，其数字后来用打结的绳子来表示，如图5，其中用黑点代表偶数，白点代表奇数。

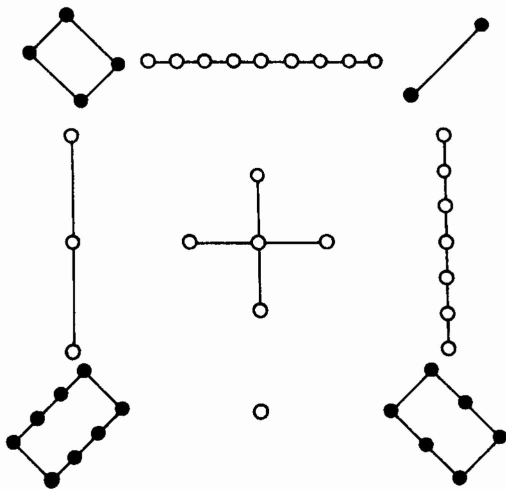


图5

32° 早期希伯来人与《洛书》

数字 15 在希伯来文的字母数字体系中由 Jahveh（耶和华）的前两个字母组成，而 15 是《洛书》的幻数，于是早期的东方犹太人在古代中国的幻方里看到了宗教的象征。

《洛书》四角的数字都是偶（即“阴”）数。去掉这些数字，幻方成为一个只有奇（即“阳”）数的十字形（图 6）。这个十字形是不同东方民族的护身符。

	9	
3	5	7
	1	

图 6

33° 保护神和护身符

幻方的每个数如果加上同一个数，当然还是一个幻方。图 7 就是以这种方式从《洛书》构造的两个幻方，其幻数分别为 21 和 18。

6	11	4
5	7	9
10	3	8

5	10	3
4	6	8
9	2	7

图 7

2 + 1 = 3，所以第一个幻方可以作为粮仓或轮船的守护标志，因为 3 是朱庇特的数字，而朱庇特是天庭之神，出没于云雾，于是可以借这个幻方来避免风雨雷电。

1 + 8 = 9，所以第二个幻方可以穿在战士身上做护身符，也可以放在教学大楼上。因为 9 是战神之数，是弱者和无辜者的保

护神。在印度洋马尔代夫群岛，少女们带着数字之和为 18 的护身符。

《洛书》本身也可以作为爱情的守护神，或者树立在花园里，因为它的幻数是 15，而 1 +5 =6，是爱和园艺的女神。

34° 最早的 4 阶幻方

最早的 4 阶幻方是在印度哈周拉合(Khajuraho)的 11 或 12 世纪的耆那教手稿中发现的，如图 8。这个幻方展示了更高级的幻方知识，因为它具有更“幻”的性质。首先，它是完全的—— 例如，2，12，5 和 15，与 2，3，15 和 14，分别在两条折角线上，其和都等于幻数 34。另外，水平和垂直中线将幻方分成 4 个小方，它们像图 8 那样有趣地相互联系着。其中左上方的 19 是 7 +12，15 是 2 + 13，9 是 7 + 2，25 是 12 + 13。这个幻方大概提供了最早的一个例子，给正规幻方赋予了更奇异的结果和特征。

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

19 9 25 15	15 9 25 19
19 25 9 15	15 25 9 19

图 8

35° 丢勒的幻方

在 16 世纪的艺术家和数学家中，丢勒是出类拔萃的一个。他 1471 年生于纽伦堡，1528 年在那儿去世。他以画家和版画家闻名，而从他关于几何、筑城和人体比例的论著还可以看到他在

不同的数学领域所表现的极大兴趣和才能。他的几何是关于高阶平面曲线的第一个版画作品；他对三分角问题的近似解，他构造的正9边形和7边形，至今还对学几何的中学生有意义。

丢勒的版画《忧郁》

丢勒的数学兴趣也表现在他的版画上，特别是著名的《忧郁》（*Melencolia*）。这幅画出现了各种数学对象，如球、圆规、直尺、比例尺、多面体，还有4阶幻方。这个最早印刷的幻方如图9。除了通常的“幻”的性质而外，这个幻方还有如下奇异特征：

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图9

1 版画《忧郁》的创作日期1514出现在幻方最后一行的中间两格。

2 前两行（列）数字的平方和等于后两行（列）数字的平

方和。

3 第一行（列）和第三行（列）数字的平方和等于第二行（列）和第四行（列）数字的平方和。

4 对角线数字之和等于非对角线数字之和。

5 对角线数字平方之和等于非对角线数字平方之和。

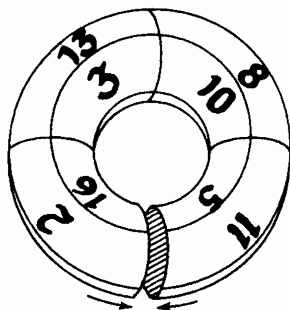
6 对角线数字立方之和等于非对角线数字立方之和。

36° 环上的完全幻方

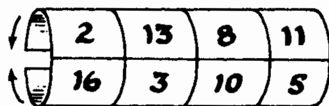
为了生动展示完全幻方的性质，可以把它画在环上。拿一个幻方（如图 10a），将其顶边和底边黏结起来，形成一个圆柱（图 10b），然后卷曲圆柱做成环（图 10c）。所有的行、列和对角线（包括折角线）在环面上构成一个闭合的圈。

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

(a)



(c)



(b)

图 10

对卷曲在环面的 4 阶正规完全幻方，从任一数字出发，沿任意对角线方向移动两格，则我们到达同一个数。这样连接的两个

数叫对跖点，任意两个对跖点之和为 17。任意圈（对角的或正交的）上的数字之和为 34；任意相邻 4 个数字之和为 34。

37° 平面上的完全幻方

如果把许多 n 阶幻方拼结在一起，像马赛克那样填充一块平面，我们就得到“一片”幻方（图 11），它的任意一个 $n \times n$ 数组都是一个完全幻方。任意 n 个相邻的数字，不论横的、纵的或对角的，其和都等于同一个幻数。

15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15
1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1
8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8
10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10
15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15
1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1
8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8
10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10
15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15
1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1
8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8	11	2	13	8
10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10	5	16	3	10
15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15	4	9	6	15
1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1	14	7	12	1

图 11

38° 超立方体上的完全幻方

为把一个 4 阶完全幻方投射到超立方体上，我们可以把它的 16 个数投射到超立方体的 16 个顶点，如图 12，这里我们用了熟

悉的超立方体的2维投影。超立方体24个面上的数字之和为34。幻方的对跖点转化为超立方体的对角点。

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

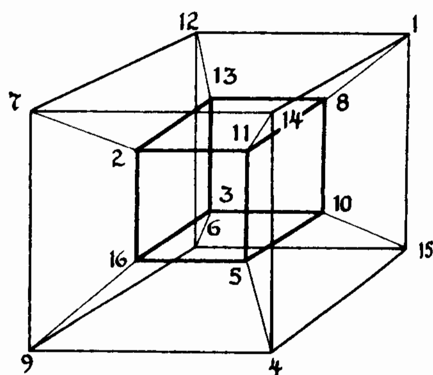
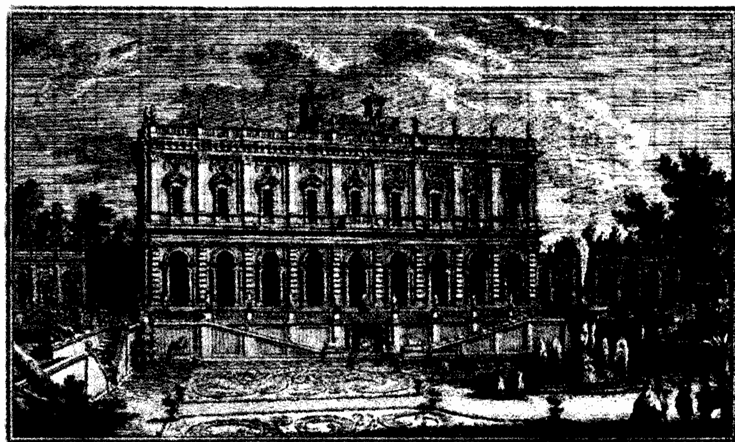


图12

39° 建筑装饰的幻方

用于建筑装饰的最精巧的幻方的例子，是镌刻在罗马阿尔巴尼庄园（Villa Albani）墙壁的一个9阶幻方。



40° 奇数阶幻方

有个叫西蒙·卢贝尔（Simon de la Loubere）的[1]，在1687到1688年间为路易十四出使暹罗时，学会了找任意奇数阶幻方的一种简便方法。我们通过构造一个5阶幻方来说明他的方法。画一个正方形，分成25小格（图13），在顶边和右边各添加一路小格，将右上角的小格画为阴影。在原来正方形顶边正中的一格写1。接下来的一般法则是，沿对角向右上方相继增大数字。如果格子超出了原来的正方形，或者已经有了数字，这个法则就不用了。在出格的情形，我们就根据情况，跳过正方形（要么从顶到底，要么从右向左），回到原来的幻方，然后继续一般的法则。在格子被占的情形，就把数字写在新填的那一格的下面，然后继续原来的法则。阴影的格子认为是有了数字的。

1 不要把他与安东尼（Antoine de la Loubere，1600～1664）混为一人了。安东尼是数学、修辞和宗教的耶稣会讲师，对平面曲线和空间曲线很有兴趣。西蒙晚年写过一本解方程的书。（原注）

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

图13

于是，在我们的例子中，根据一般法则，2应该写在1的右上格，即上边一行的第四格。它出格了，于是应把2移到原来幻方的底边的第4格。这样下去，当我们得到数字4时，它在增加的右列的第三格。于是，我们又该将它移到原来幻方的左边第一列的第三格。按照一般法则，数字6应该写在1的位置；于是，我们将它写在新填写的5的下面。如此这般，幻方就填满了。

读者也许愿意试试卢贝尔的方法构造一个7阶幻方。《洛

书》基本上就是根据卢贝尔方法构造的 3 阶幻方。

41° 双偶数阶幻方

有一个简便方法能构造双偶数阶（即阶数为 4 的倍数）幻方。先考虑一个 4 阶幻方，把对角线像图 14 那样画出来。从左上角开始，逐行向右向下数，只在对角线外的格子里记下数字。现在，从右下角开始，逐行从右向左向上数，只记对角线上的格子里的数字。最后得到的幻方与丢勒版画里的略有不同。

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 14

同样的法则也适用于任何 $4n$ 阶幻方，即画出 n^2 个基本 4×4 方块的对角线。图 15 是以这种法则构造的 8×8 幻方。读者现在大概愿意自己构造一个 12 阶的幻方吧。

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 15

42° 双幻方和三幻方

对某些 n 值，可以构造一个 n 阶幻方，然后将每个数字平方，则得到的数字仍然构成一个幻方。图 16 是舒茨（M. H. Schots）构造的一个 8 阶正规完全双幻方。幻数为 260；平方后的幻方的幻数为 11180。

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

图 16

70	75	59	15	26	1	38	49	36
11	22	9	43	48	32	69	80	55
42	53	28	65	76	63	16	21	5
57	68	79	8	10	24	31	45	47
4	18	20	30	41	52	62	64	78
35	37	51	58	72	74	3	14	25
77	61	66	19	6	17	54	29	40
27	2	13	50	34	39	73	60	71
46	33	44	81	56	67	23	7	12

图 17

图 17 是希思（R. V. Heath）的一个 9 阶正规双幻方的例子。不存在阶数小于 8 的正规双幻方。

如果幻方的平方和立方也都是幻方，就称它是三幻方。有 64、81 和 128 阶正规三幻方。

43° 素幻方

所谓素幻方，是说它的每个数字都是素数（在这儿，1 也作为素数）。著名英国谜题专家杜德尼（H. E. Dudeney）提出了如图 18a 的素幻方，贝格霍特（E. Bergholt）和舒德曼（C. D. Shuldham）提出了如图 18b 的素幻方。在这个幻方里，出现了前

13 个奇素数和素数 47、53 和 71。塞尔斯（H. A. Sayles）和芒西（J. N. Muncey）构造了 5，6，…，12 阶素幻方。他的 12 阶素幻方特别有趣，因为那 144 个数正好是前 144 个奇素数：1，3，5，7，11，…，827。已经证明，假如 $n<12$，前 n 个奇素数不能构成幻方。

67	1	43
13	37	61
31	73	7

(a)

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

(b)

图 18

图 19a 和 19b 分别是 3 阶和 4 阶素幻方，在这儿，1 不再被作为素数。1961 年 10 月的《娱乐数学杂志》发表过这样的 13 阶素幻方。人们猜想，对 $n>8$ 的每个数，存在无限多个这样的素幻方。

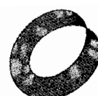
569	59	449
239	359	479
269	659	149

(a)

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

(b)

图 19



44° 斐波那契幻方

数列 1，1，2，3，5，8，…，其中每个数是前面两个数字之和，即所谓斐波那契数列。已经证明，不存在仅由斐波那契数列的数字构成的幻方。不过这些数字和这些数字对之和，可以构成幻方。（斐波那契数列的奇特性质，见《走进数学圈》114。）

45° 幻立方

n 阶幻立方是 n^3 个不同整数形成的数阵，任意行、列、组和对角线上的数字都有相同之和（即这个幻立方的幻数）。如果数字是前 n 个正整数，则称其为正规的。在这种情形，幻数等于 $n(n^3+1)/2$，而且以 $3n^2+4$ 种形式出现。任意奇数或任意双偶数

第一层				第二层			
1	8	61	80	48	41	20	21
62	59	2	7	19	22	47	42
52	53	16	9	29	28	33	40
15	10	51	54	34	39	30	27
32	25	36	37	49	56	13	12
35	38	31	26	14	11	50	55
45	44	17	24	4	5	64	57
18	23	46	43	63	58	3	6
第四层				第三层			

图 20

阶的正规幻立方，可以通过推广正规幻方的方法来构造。如果不但 4 条主对角线，而且所有折角线的数字之和也等于幻数，则称幻立方是完全的。在完全幻立方中，幻数出现 $7n^2$ 次。

最不寻常的正规完全幻立方的例子之一，是希思提出的，如图 20。这里，一个 8 阶正规幻方被分解为 4 个，作为一个 4 阶正规完全幻立方的 4 层。每层本身也是一个 4 阶幻方。原来的 8 阶幻方还有一个性质：假如交替地随便去掉行和列——有 4 种方式——那么余下的 16 个数仍然构成一个幻数为 130 的 4 阶幻方。

46° 大脑与机器

所谓 n 阶拉丁方是一个 $n \times n$ 方阵，其中 n 个不同符号在每一行和列出现一次，且只出现一次。所谓 n 阶欧拉方是关于 n^2 个元素的 $n \times n$ 方阵，其中第 (i, j) 个元素（即第 i 行 j 列的元素）是一个有序符号对，第一个符号是一个拉丁方的第 (i, j) 个元素，第二个符号是另一个拉丁方的第 (i, j) 个元素。例如，图 21 有两个 5 阶拉丁方，都以 0，1，2，3，4 为符号。从这两个拉丁方我们可以得到图 22 的 5 阶欧拉方（因为所有 25 个元素

3	1	4	2	0
2	0	3	1	4
1	4	2	0	3
0	3	1	4	2
4	2	0	3	1

4	2	0	3	1
0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0

图 21

34	12	40	23	01
20	03	31	14	42
11	44	22	00	33
02	30	13	41	24
43	21	04	32	10

图 22

都是不同的）。

几百年来，我们知道了构造奇数阶和双偶数（即 $n=4m$）阶欧拉方的方法。无数次构造单偶数（即 $n=4m+2$）阶欧拉方的努力失败之后，欧拉在1782年猜测，那样的方阵是不存在的。猜想对 $n=2$ 来说是很寻常的；1900年，塔里（G. Tarry）利用穷竭法，系统检验了每种可能，从而证明 $n=6$ 的情形。下一个情形，$n=10$，可能性太多，塔里的方法完全失去了意义。实际上，电子计算机对它也无能为力。有台机器用了100个小时来找10阶欧拉方，一个也没找到。其实，它连最起码的一些可能性都没检验完。直到1959年才编制了更好的程序，玻色（R. C. Bose）、史里翰德（S. S. Shrikhande）和帕克（E. T. Parker）在那年否定了欧拉猜想。帕克做出了如图23的10阶欧拉方。一年后，人们证明，欧拉猜想对 $n>6$ 是错误的。就是说，除了 n

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

图23

$=2$ 和 $n=6$，对所有正整数 n 都存在 n 阶欧拉方。

如图 22 和 23 的欧拉方是半幻方。每个欧拉方都至少产生一个半幻方。

47° 欧拉方的起源

欧拉方源于欧拉提出的一个问题："有个奇怪的问题是这样的：来自 6 个不同部队的 6 种军衔的 36 个军官，他们要排一个方阵，要求每行每列都要有不同部队和不同军衔的军官。"欧拉没能解决这个问题。

要求的这个军官列阵是一个 6 阶欧拉方。从上面我们知道，这个问题没有解。

数学带来的设计

有些不同寻常的美妙的设计图案是从某些数学问题或游戏中产生的，把它们收集起来编一本小册子既好玩儿，也有价值，而且没多大困难。下面就是一些例子。也许有的读者愿意继续编下去；这些材料对中学数学实验是很有意义的。

48°《洛书》与艺术

在喷气式飞机出现之前，在远洋客轮的游艺甲板上，常常可以看到以《洛书》（见 S31 图 4）闻名的 3×3 幻方，被用来作为推盘游戏的记分牌。

有人用串珠式的《洛书》（S31 图 5）来装点卧室的天花板，他想到的是《洛书》关联着数字 6，也就连着爱的女神维纳斯

（见 S33）。

还有人用东方图案来设计海滨别墅，用串珠的《洛书》来修饰中央客厅的灯光，每个串珠都是凹进天花板的一只小灯泡，蓝光来自奇数（“阳”），红光来自偶数（“阴”）。

49° “幻迹”

美国建筑学家和术士布拉东（Claude Fayette Bragdon，1946年去世）惊奇地发现，在许多幻方中，按照数字的顺序，从一格连接到另一格的线段会形成可爱的艺术图案。有时候，更好的路线是只追踪奇数（“阳”）或偶数（“阴”）。布拉东用如此得来的图案做图书封面、织物图样和建筑装饰。他用这些图样做自传《多样生命》（*More Lives Than One*）每一章的题图；他把老家纽约州罗切斯特城商务大楼的天顶通气窗做成《洛书》的数字路径。

图 24 显示了用卢贝尔方法得到的 5 阶幻方所产生的路径。这个图案画在屏幕或围巾上，或用作门格子，是相当漂亮的，看见的人几乎不会猜到它的来源。有人送作者一个领结扣，上面就刻着这样的有趣图案。图 25a 和 25b 分别显示了同一个幻方的“阳”路径和“阴”路径。

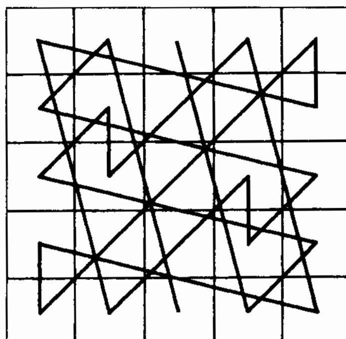
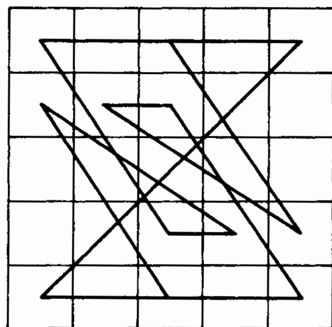


图 24

图 26 是叠加在一起的《洛书》的阴阳径迹，它可以作为婚




(a)

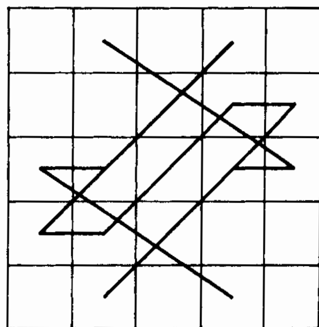
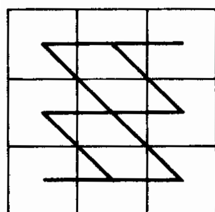

(b)

图 25


图 26

姻的标志，适合装饰新房的门窗和床头。

50° “马路”

有个难题是，在普通棋盘上确定一条马的路径：要踏过每个格子且每个格子只能经过一次，最后一步跳回原地。这个问题的最漂亮的解决之一，是罗杰（P. M. Roget）在 1840 年提出的，如图 27。马的路线为屏风、挂毯和铁栅栏提供了奇异而迷人的图案。

马在棋盘上有多少不同的可能的回归路线还不知道，但那是

34	51	32	15	38	53	18	3
31	14	35	52	17	2	39	54
50	33	16	29	56	37	4	19
13	30	49	36	1	20	55	40
48	63	28	9	44	57	22	5
27	12	45	64	21	8	41	58
62	47	10	25	60	43	6	23
11	26	61	46	7	24	59	42

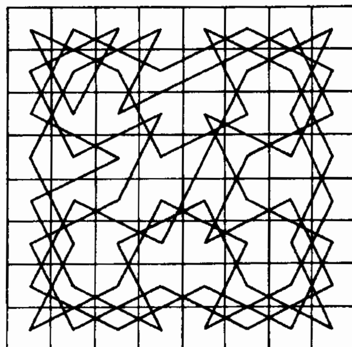


图 27

一个很大的数字，下限是 122 802 512，而上限的数字是从 168 件东西中一次性取出 63 件的组合数。因为问题的解法很多，而且 8 阶幻方也有很多，我们自然想知道，普通棋盘的回归路径是否也同时能形成一个 8 阶幻方？图 28 展示了马的回归路线形成一个 8 阶半幻方——就是说，行列的数字之和相同，而两条主对角线的数字之和不同。这种路线是漂亮的床单图案。把它放在天井的地板上，也很诱人。

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

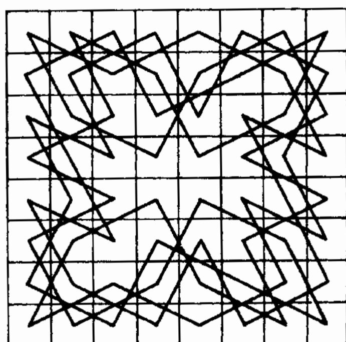


图 28

51° “半边路线”

图 29 和 30 所画的马的回归路线特别惹人注意的一点是，它

35	40	63	54	15	12	17	26
62	53	34	39	18	27	14	11
41	36	55	64	13	16	25	28
52	61	38	33	24	19	10	5
37	42	51	56	1	6	29	20
60	57	48	45	32	23	4	9
43	46	59	50	7	2	21	30
58	49	44	47	22	31	8	3

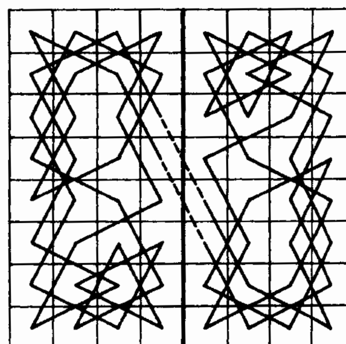


图 29

们先走遍棋盘的右半边，然后走遍左半边。第一个这样的解是瑞士数学家欧拉提出的；第二个解来自罗杰。这些解很适合装点两部分折叠的屏风；画在双人床单上也很漂亮。

35	38	55	58	11	14	31	18
54	57	34	37	32	17	10	13
39	36	59	56	15	12	19	30
60	53	40	33	20	29	16	9
41	48	61	52	1	8	21	28
62	51	44	47	24	27	4	7
45	42	49	64	5	2	25	22
50	63	46	43	26	23	6	3

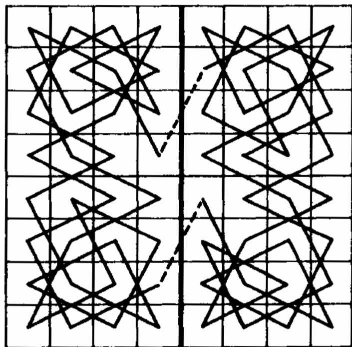


图 30

52° 半边路线形成的幻方

图 31 的两条马的回归路线正好都经过棋盘的 32 个格子。值得注意的是，它们联合起来构成一个幻方。如果用不同的颜色把这两条线画在毯子或床单上，一定很漂亮。

15	20	17	36	13	64	61	34
18	37	14	21	60	35	12	63
25	16	19	44	5	62	33	56
38	45	26	59	22	55	4	11
27	24	39	6	43	10	57	54
40	49	46	23	58	3	32	9
47	28	51	42	7	30	53	2
50	41	48	29	52	1	8	31

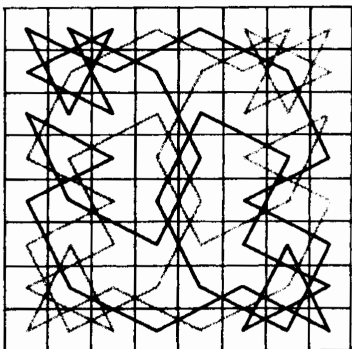


图 31

53° 快马的回归线

在棋盘上，寻常的马走“日”字（一格对角接着一个非对角），而“快马”走“目”字（一格对角接着两个非对角）。于是，如果一只快马从棋盘的黑格出发，那么它将永远只能踏在黑格上。这就引出一个问题：我们是否能用两只快马的路线来踏遍整个棋盘？图 32 是这个问题的一个美妙的解，同样是漂亮的地毯和床单的图案。（注：“快马”是假想的棋子。）

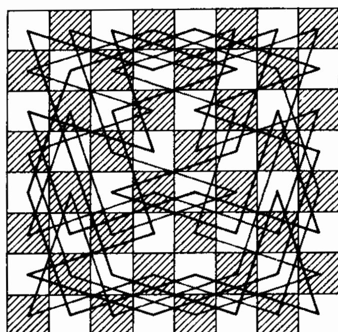


图 32

54° 王回归线的幻方

图 33 画了一条“王”在棋盘上的回归路线，也构成一个幻

61	62	63	64	1	2	3	4
60	11	88	57	8	7	54	5
12	59	10	9	56	55	6	53
13	14	15	16	49	50	51	52
20	19	18	17	48	47	46	45
21	38	23	24	41	42	27	44
37	22	39	40	28	26	43	28
36	35	34	33	32	31	30	29

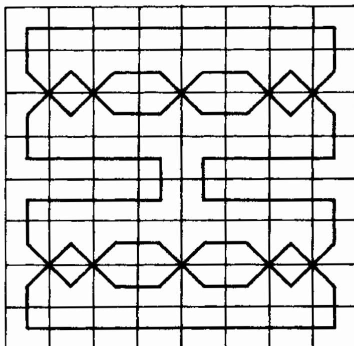


图 33

方。这是极好的床单花样，像真正的美洲印第安人的图案。

55° 一则佳话

杜德尼（Henry Ernet Dudeney，1857 ~ 1931）无疑是英国一流的数学谜题专家，也是几何图形分割的高手。他在这方面最有名的成果是将等边三角形分割为 4 块，然后拼接成一个正方形。当时已经知道分成 5 块的问题，而且一般认为不可能分割更少了。杜德尼大概是 1902 年发现分割 4 块的，从此成为图形分割文献中的名人。图 34 说明了他是如何分割的。线段 AD，DB，BE，EC，FG 都等于三角形边的一半；EF 等于所求正方形的边；DJ 和 GK 都垂直于 EF。

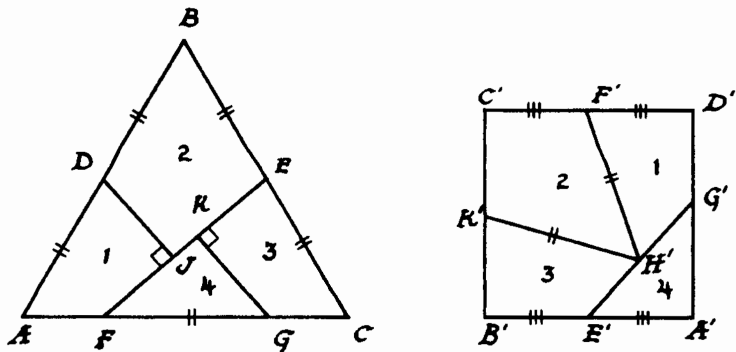
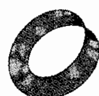


图 34

如果把 1，2，3，4 块在顶点 D，E，G 串联起来，固定第 1 块，沿逆时针方向旋转连接的 4 - 3 - 2 块（图 35），则等边三角形就转换为正方形。根据这个事实可以做一个 4 块相连的小玩具，沿一个方向旋转这些小块，让它们顶点相接，将得到一块等边三角形；而沿另一个方向，可以得到一块正方形。这块三角形可以用来做三人或四人游戏。它是一件有趣的家具；即使什么也



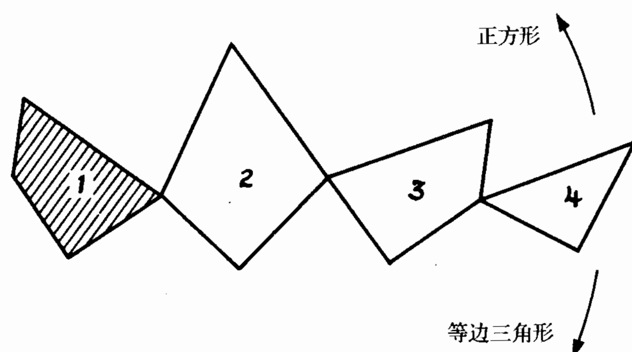


图 35

不是，也是一则佳话。

56° 天井图案

里昂(L. V. Lyons)用杜德尼的方法,将平面美妙地分割为等边三角形与正方形相接的镶嵌图案(如图 36)。这个艺术图样非常适合天井的地面装饰,或者用于大学的数学大楼的某些地方。

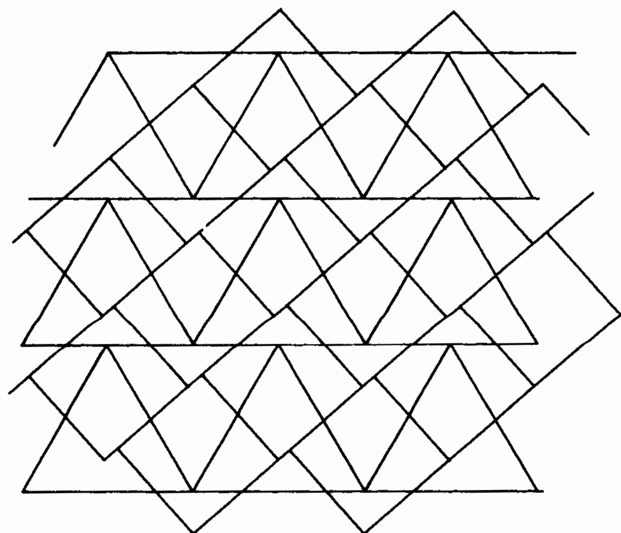


图 36

57° 八边形难题

杜德尼打破了几个多边形分割的老纪录。例如，他第一个将正5边形分割为6块拼接为正方形，将正方形分为6块拼接为3个正方形。奇怪的是，杜德尼夫人艾丽思（Alice Dudeney）在为杜德尼的《奇趣问题集》（*Puzzles and Curious Problems*，作者去世后，在1932年出版。1936年和1941年重印，1948年经特拉维斯（James Travers）修订重印）的序言里写过一句话："值得注意的是，正八边形只需要分割4块就能拼接为一个正方形。"这似乎在说，杜德尼曾成功分割为4块，但从来没人见过那样的分割。图37是一种漂亮的5块分割，由特拉维斯在1933年发表。奇怪的是，修订过那本书的特拉维斯没有改正杜德尼夫人的那句没有证明的话，也没加任何说明。很难相信这个问题的4块分割是可能的。

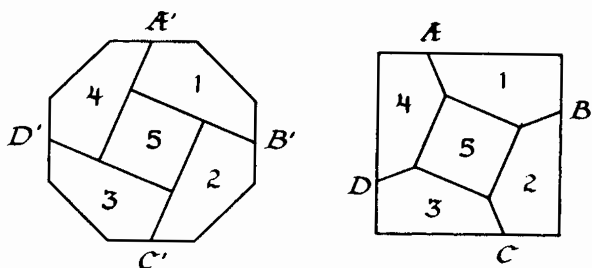


图37

在特拉维斯的分割里，我们可以得到另一组不同寻常的拼接小块。4个相同的小块（图37中的1，2，3，4块）可以拼接在中间的正方形小块周围，形成一块八边形或一块正方形。

58° 郁金香花园

赫伍德（P. J. Heawood）第一个证明，为了给环面上的所有地图着色，至少需要7种颜色。只要展示一幅需要7种颜色的环面地图，就能确立这个定理，因为可以证明7种颜色足够了。可以设计许多这样的简单地图。图38和39画了两种。对这两张图，我们设想，先将矩形的顶边和底边黏结起来，形成一个圆筒；然后把圆筒两端的圆周粘结起来，就形成一个环。于是，每张图都包含了7个国家，任意一个都与其他六个有共同的边境线，因而必须用7种颜色来填充。

我们可以聪明地借图38和39来做矩形花坛，例如郁金香的花坛，种7种不同颜色的郁金香来构成一张7个国家的地图。

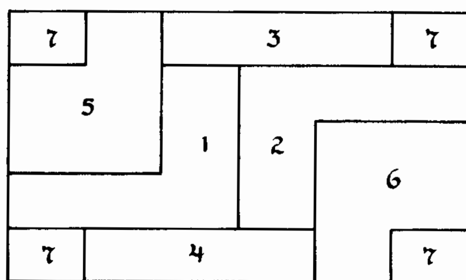


图38

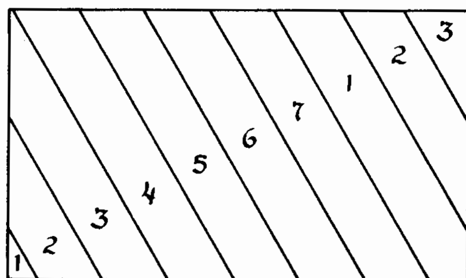


图39

它们还可以用来作为庭院或数学系大楼大厅入口的图案。这时，7 个不同的区域可以用不同颜色的黏合剂或涂料来装点。

59° 射影平面的花园

泰茨（Tietze）证明，射影平面上的地图至少需要 6 种颜色。因为射影平面可以用一个圆盘来表示，但直径在圆盘边缘的两点要看做同一点。图 40 的三个图都代表一张射影平面上的 6 色地图（其中的每个国家都与其他 5 国有共同的边境线）。和环面地图的情形一样，这里的每个图也都可以用作令人羡慕的花园设计——不过花园是圆的，需要 6 种颜色的鲜花。

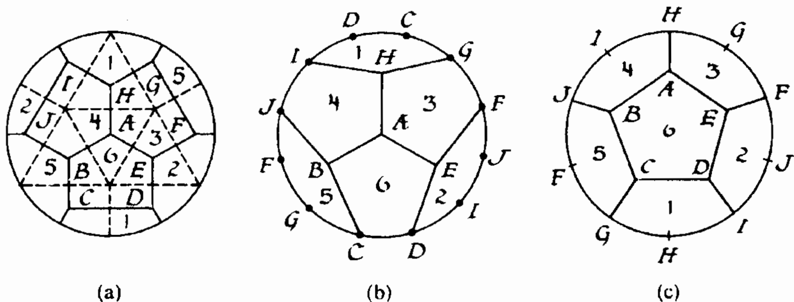
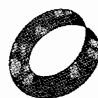


图 40　(a)　(b)　(c)

60° 施勒格尔花坛

说到花园设计，我们应该说说以施勒格尔（Victor Schlegel）的名字命名的 5 种正多面体的所谓“施勒格尔图形”。一个多面体（或更一般的凸多面体）的施勒格尔图形，可以通过从多面体外足够靠近某个面心的一点的中心投影得到。那个面的中心投影包含了其他所有面的投影。图 41 画出了 5 种正多面体的施勒格尔图形。每个图都可以用作花坛的图样。



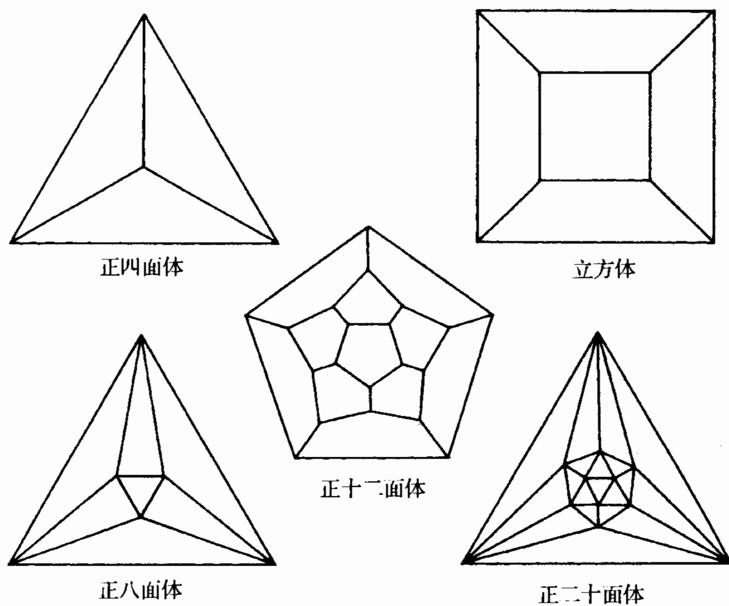


图 41

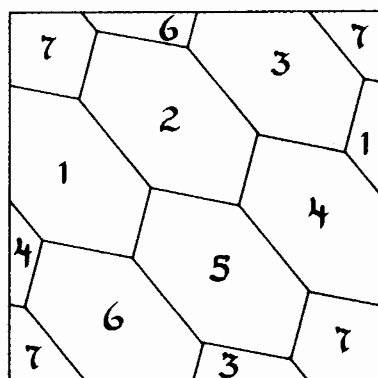


图 42

61° 塔克教授的国旗

图 42 画了另一种花坛图形，是通过正方形表现的。我们当

然可以用这样的图形来装点女士的头巾。

水平拉伸图42,我们可以把正方形地图转化为矩形地图。关于这个矩形图,普林斯顿大学的塔克教授在多年前的一堂基础组合拓扑课上说,"假如我是独裁者,我会把我的国旗做成这个样子。"

62° 更多的天井图样

1925 年，莫隆（Z. Morón）注意到，32×33 矩形可以分割为 9 个各不相等的正方形。这引出一个问题：一个正方形是否能分割为有限多个互不相等的正方形？这个问题感觉似乎不可能，结果却不是这样的。1939 年发表了一个正方形分割为不同小正方形的例子，是柏林的斯普拉格（R. Sprague）做的，包含了 55 个小正方形。1940 年，布鲁克斯（R. C. Brooks）、史密斯（C. A. B. Smith）、斯通（A. H. Stone）和图特（W. T. Tutte）在一篇合作论文里发表了 26 个小正方形的分割法。这几个人创造性地建立了分割问题与电网的某些电流性质之间的关系。1948 年，维尔科克(T. H. Willcocks) 发表了 24 个小正方形的分割（如图 44），这也是迄今为止数目最少的分割。当然，这样的分割图形也一定会出现在某个大学的数学大楼的规划和设计中。

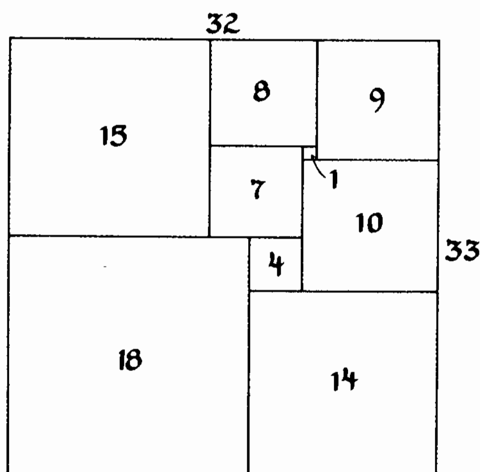


图 43

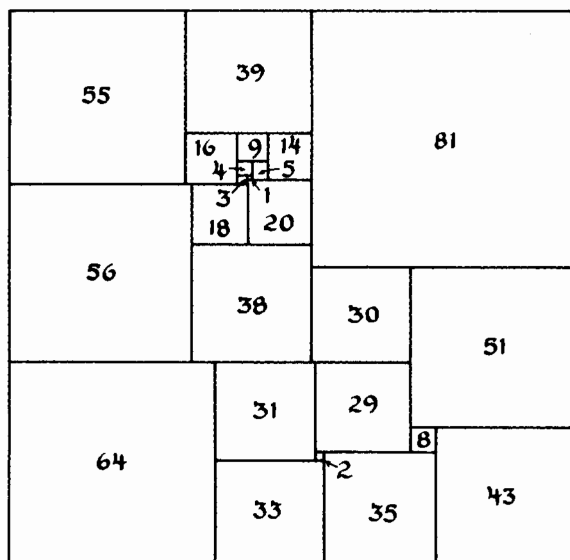


图 44

63° 数学大楼的休息厅

在考虑新数学大楼的设计时，似乎应该把许多能代表不同数学研究领域的花样图案容纳进来。前面的几个故事已经提出了一些可能的建议。

在射影几何里，最漂亮而多产的定理似乎要算著名的帕斯卡六线形定理："内接于圆锥曲线的六边形三对边的交点共线。"

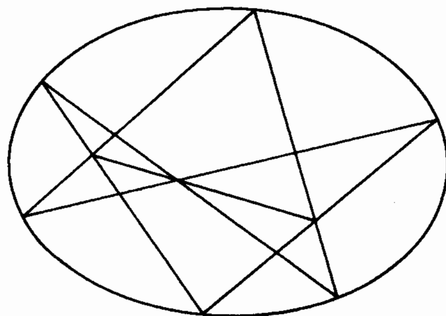


图 45

那么，为什么不把如图 45 表示的这个美妙定理用在新大楼的门厅呢？而且，还可以给线条镶上金边。

64° 房号

在上面说的新数学大楼里，为了标记房间的门牌号，除了通常的印度－阿拉伯数字而外，还可以用一些有趣的数字系统。数字的选择可以根据大学所在的国家和地区。例如，在墨西哥用古代玛雅数字，在埃及用古埃及的象形文字。其他可能的数字还有巴比伦的楔形文，希伯来文、中文（繁体字或简化字）、希腊文（字母或西律王数字）、波斯文和罗马数字。在教学机构，特别适合装点这样一些表现古今文化融合的印迹。

65° 礼盒打包

人们常像图 46 那样用丝带给礼盒打包。在盒子的顶面和底面可以看到两条平行的大致沿对角方向的丝带。假如分别以 a，b，c 代表盒子的长、宽和高，可以证明，丝带的长度（不计节点和蝴蝶结）为

$$d=2\sqrt{((a+c)^2+(b+c)^2)}$$

而且，丝带可以不经拉伸地移到平行位置。（丝带与盒子边缘夹角的正切为 $(a+c)/(b+c)$ 或 $(b+c)/(a+c)$。）许多大型商场就根据这些事实，用长度略短于 d 的弹性线圈，迅速而有效地将盒子固定下来。

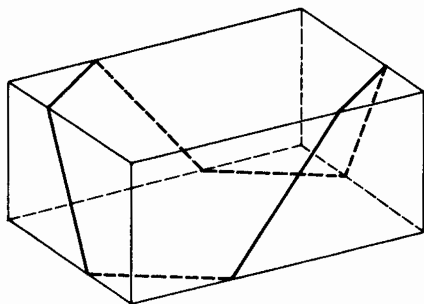


图 46

66° 毕达哥拉斯定理图

有时候，几何证明的图也能用作设计图案。例如，毕达哥拉斯定理有一种简单的分割证明：像图 47（a）那样把直角三角形斜边的正方形分割为 4 个全等的直角三角形和一个边长等于两直角边之差的正方形。记直角三角形直角边和斜边分别为 a，b，c，其中 $a>b$，我们有

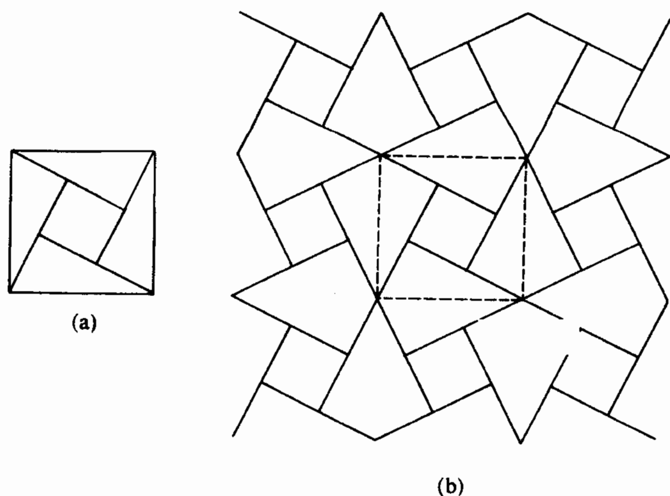


图 47

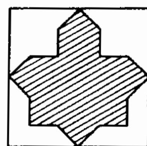
$$c^2 = 4(ab/2) + (a-b)^2 = 2ab + (a^2 + b^2 - 2ab) = a^2 + b^2$$

这样就证明了毕达哥拉斯定理。图 47(b)是以证明图为基础的格子窗设计图案。实际上,这样的格子曾用于中世纪的阿拉伯。

67° 枫叶瓷砖

我们通常看到地板镶嵌着正方形、矩形、等边三角形或正多边形的瓷砖。用其他某个形状的瓷砖来装饰地板，也很有趣，而且还需要费一点儿心思。图 48（a）是一块简单的瓷砖，就像一

片枫叶，也能用来镶嵌地板（图48b）。在加拿大的公共场所铺设这样的地板是很诱人的。


(a)

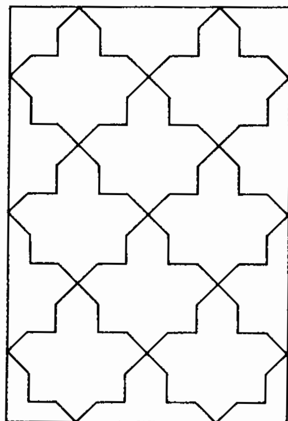
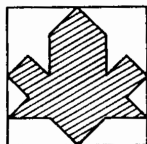

(b)

图48

68° 另一种枫叶瓷砖

图49是一块更复杂的枫叶瓷砖和用它铺设的更复杂的地板。加州的阿尔罕布拉（Alhambra）有这种地板，这种形状的瓷砖今天也有厂家生产。


(a)

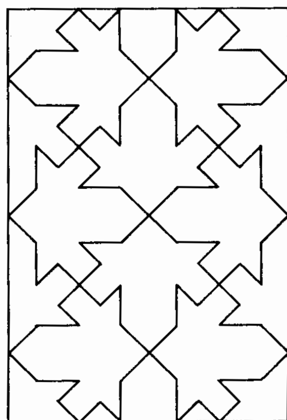

(b)

图49

69° 其他瓷砖

图 50 的 6 个图形展示了其他形状的瓷砖，有的也可以做铁

(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

图 50

栅栏。图 50(b)是罗马和拜赞廷装饰的基础图案。在罗马的人行道上可以看到图 50(c)的图样。现代形式的图 50(d)和(e)源自阿拉伯。除了图 50(f)，其他几个都是从半圆和四分之一圆构造出来的。

70° 灯座

正如有曲线能填充整个正方形（见《重游数学圈》R332），同样有曲线能填充立方体的内部。和平面情形一样，这样的空间曲线也定义为多边形（空间）曲线序列的极限。图 51 填充立体盒子的曲线序列的前两阶形式。其中第二种，如果用细铁棒来做，可以作为现代台灯的底座。

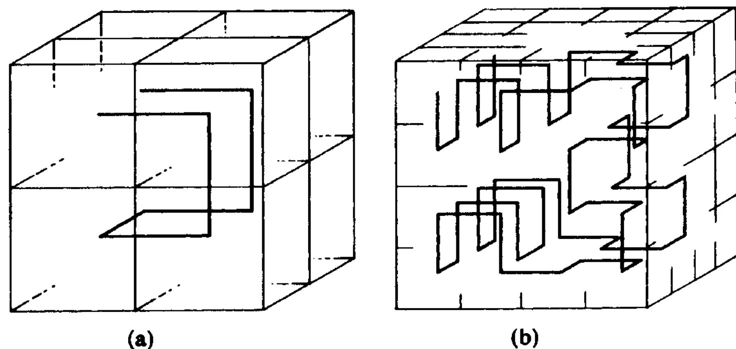


图 51

71° 棋盘被面

乍看起来，图 52 的被子图案是杂乱无章的，其实它有一定的对称性，而且其构造背后还藏着一些道理。

让我们把被面想象成一个棋盘，每个带字母 R 的格子放着一个王后，那么我们就得到一个 8 王后问题的解（即棋盘上放 8 个王后，相互不能被对方吃掉）。同样，字母 B，Y，G，P 的格子，也都是 8 王后问题的解。字母 M 和 N 则代表着棋盘上的 7 个王后不会被相互吃掉。于是，6 组 8 王后和 2 组 7 王后叠加在一起，填充了 64 格棋盘的 62 格。格塞特（Thorold Gosset）证明，不可能把 8 组 8 王后叠加在一个棋盘上。

	P	R	O	B	G	Y	
M	B	Y	G	R	P	O	N
P	R	M	B	O	N	G	Y
G	Y	O	N	M	B	P	R
O	N	G	P	Y	R	M	B
Y	M	B	R	G	O	N	P
B	G	P	M	N	Y	R	O
R	O	N	Y	P	M	B	G

图 52

还应该注意，这 8 组棋子相对于棋盘的垂直平分线是成对地反射对称的。就是说，*R* 和 *G*，*B* 和 *O*，*Y* 和 *P*，*M* 和 *N* 是对称排列的。假如用同样的颜色标记每对对称排列的字母，我们就得到一床漂亮的对称图样的被面（图 53）。

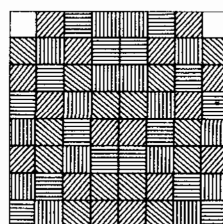


图 53

72° 拼板被面

5 个正方形格子挨边连接，构成一块 5 格拼板（*pentomino*），有 12 种这样的拼板，都画在图 54。

一个有趣的游戏是将这 12 块拼板拼在一起组成一个 8×8 正方形，正中留下一个 2×2 的小正方形孔。1958 年，斯科特（Dana S. Scott）用 MANIAC 电子计算机来寻找问题的答案。经过三个半小时的运行，机器找出了全部 65 个不同的解（其中任意一个不能从旋转和反射得到另一个）。在每一个解中，直线形的拼板都出现在 8×8 正方形的边缘。还有 7 个解没有“十字路

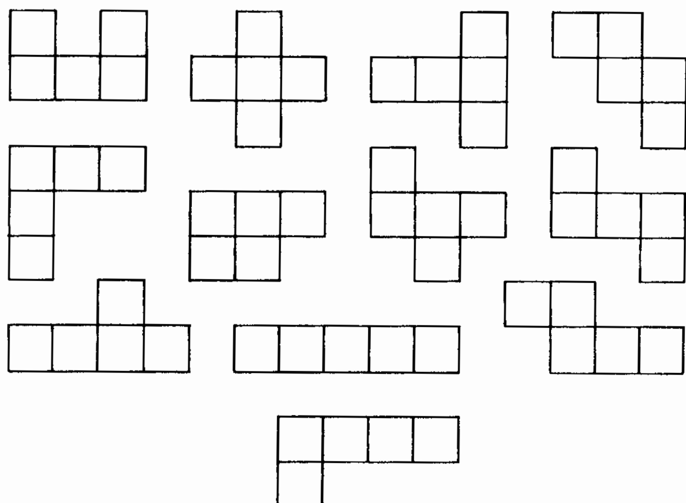


图 54

口”，即没有一点是 4 个角的交点。图 55 是其中的一个例子。还有很多方式用这些拼板来拼接 8×8 正方形，而使 4 个空格分离但对称分布。图 56，57，58 是三个例子。这里的几个图形都可以用作双人床的被面。图 59 是用 12 块拼板做的 5×6 矩形，可以用作一对单人床的被面。

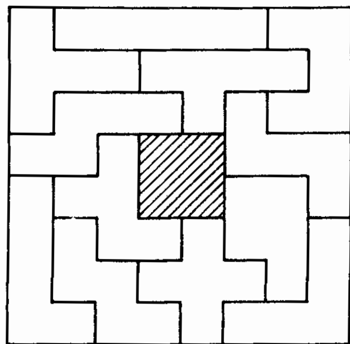


图 55

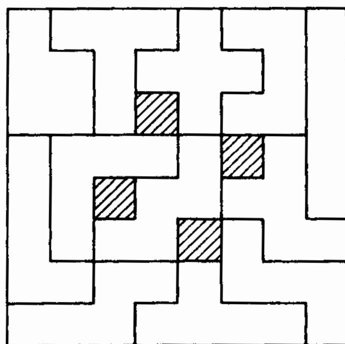


图 56

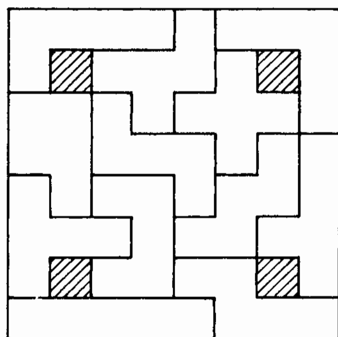


图 57

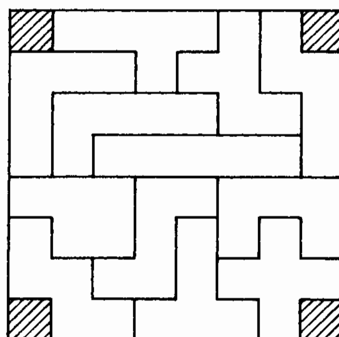
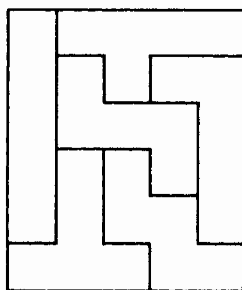


图 58



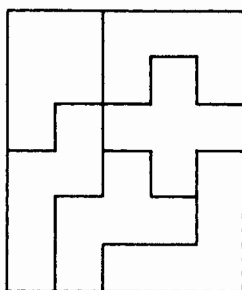


图 59

那 12 块拼板还可以组合成 6×10，5×12，4×15 和 3×20 的矩形，不过要请读者自己去做了。

几　　何

上面讲了许多从几何产生的装饰图案，现在，也许该讲一些关于几何这一门古老学科的故事，来结束这个象限的行程。

73° 类比

欧几里得几何基础对高斯几何基础，犹如牛顿物理学的粒子

概念对法拉第和麦克斯韦的矢量概念。

74° 第二个类比

张量分解为分量似乎是人为活动，因为分量不属于张量的基本组成。建立一个坐标系来分析张量的分量，犹如搭建一个脚手架来分析一座大楼的每个部分。脚手架不属于大楼，不过它当然帮助我们达成了目标。

75° 一个可能的科幻小说对象

有些几何概念，如牟比乌斯带、超立方体和高维空间等，被经常用于科幻小说。不过还有一个概念显然是被忽略了，那就是黎曼球，即把球面对径点视为同一点的球面。黎曼球的一个特殊性质是，环球旅行一周回到起点，左右方向将发生转换。旅行者回到家乡，会感觉方向错乱，原先在他右边的东西现在出现在左边了，而整个城市成了它在镜子里的模样。他甚至连报纸都读不了，因为字是从右向左印的。不过，再环球旅行一周，一切都将恢复正常，奇异的方向倒转也会扭转过来。[2]

2 威尔斯（H. G. Wells）在《普兰特纳的故事》（*The Plattner Story*）里运用了类似的思想，让嵌在4维点空间里的3维点空间中的两个对称的图形一样（如左右手手套）。（原注）

76° 理论的真理

柏拉图在《理想国》第七卷讨论了如何去发现主宰天体运行的定律，问我们是否可以仰望天空去寻求这些定律。他将这样的观察比作几何图形的视觉考察和测量。他指出，即使对最完美的几何图形，这样的考察和测量再多，也不可能真正发现图形的几何性质——只有从基本原理出发，通过严格的演绎，才可能发现它们。柏拉图最后说，天文学也该以类似的方法去探索。于是，向下看的天文学家比向上看的天文学家更有可能发现天体的

定律。牛顿和爱因斯坦都是柏拉图式的天文学家，他们通过地面的沉思，发现了天上的秘密。爱因斯坦说："理论的真理在你的头脑，而不在你的眼睛。"

77° 宙克西斯和阿波罗多拉斯

射影几何在17世纪和后来的发展，大大得益于艺术的刺激；文艺复兴初期的艺术家和建筑学家在寻求更真实的表现手法的过程中，发现了透视的规律。于是，像达·芬奇（Leonardo da Vinci）和丢勒等艺术家，成为射影几何在欧洲发展的先驱。

而射影几何并不是从欧洲人开始的，因为我们发现这门学科的某些方面在古希腊就有了相当程度的发展。不过在那时候，它的灵感很可能仍然来自当时的艺术。希腊人不但精于哲学和自然科学，同样精于美术，正如他们的雕塑和建筑所证明的。在美术领域，希腊人的绘画成就也毫不逊色，但因为绘画材料不够结实，他们的作品已随时光消失殆尽；我们只能从文字记载中去寻求希腊人的绘画技巧了。

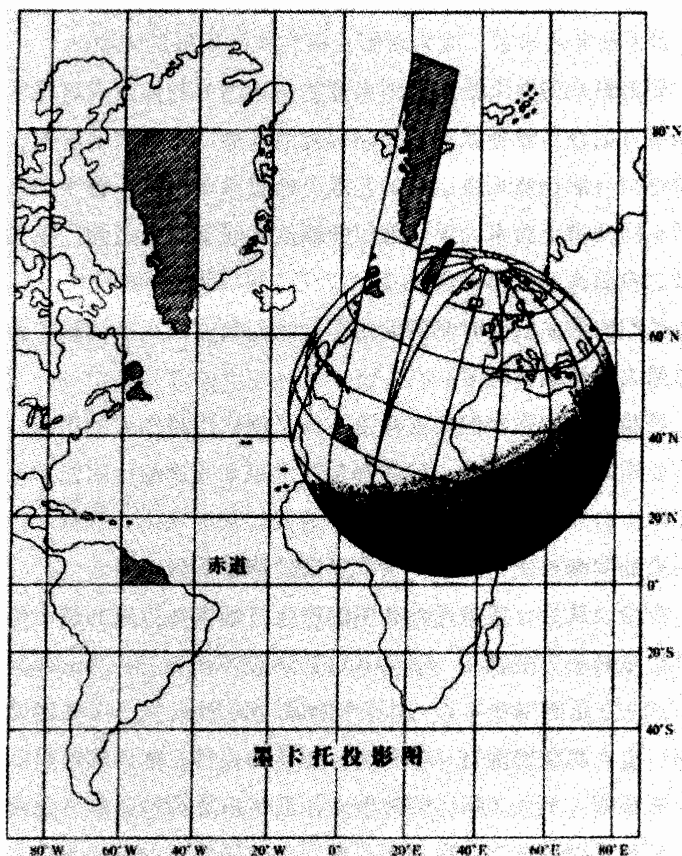
希腊的戏剧作家们相互竞争，为了创作超越别人的作品，他们需要道具和舞台背景，那些都是艺术家来完成的；而艺术家们为了产生自然的效果，又需要了解透视的基本规律。这些规律加上后来的明暗技法，产生了某些逼真的舞台背景绘画。

有传说认为，通过透视和明暗产生三维视觉效果的两个伟大典范，是画家宙克西斯（Zeuxis）和阿波罗多拉斯（Appollodorus）（约公元前400年）。这两个画家友好而竞争，很难说谁更高明。宙克西斯曾画过一串葡萄，像真的一样，把鸟都吸引到画布上来乱啄。不久之后，阿波罗多拉斯请宙克西斯来鉴赏他最近的一幅风景画。宙克西斯看画时要朋友把画两边的帘子拿走，以

便他能看到整个画面——可那帘子原来是画的一部分。于是，宙克西斯承认他的朋友阿波罗多拉斯更胜一筹。他说："宙克西斯骗过了小鸟，而阿波罗多拉斯骗过了宙克西斯。"

78° 地图

过去，有个水手发现将航行固定在罗盘的一定指向是很方便的——例如，可以让船头总是朝着罗盘指示的北北西（NNW）



墨卡托投影

方向。这样的航线与地球子午线交于一定的角度，被称为斜航线。为了帮助这种航海方法，文艺复兴时期的地理学家墨卡托（Gerhard Mercator，1512 ~ 1594）设计了一种方法，将球面投影到平面，同时将球面的斜航线投影为平面的直线。这种投影即著名的墨卡托投影。利用墨卡托投影，水手只需在地图上画一条适当的直线，就确定了航线，然后将船舵固定在相应的罗盘方向就行了。今天，通讯卫星很容易确定船在一天的任意时刻的任意位置，过去不可或缺的罗盘也不再是航海的必要仪器了。

在航空旅行中，飞行员总想选择一条最省时、最省油的航线。这意味着他需要沿地球的一个大圆飞行。于是，飞行员心目中的理想地图应该是把球面的大圆（而不是斜航线）映射为地图上的直线，这样，飞行员只要在图上画一条从起点到终点的直线，就确定了他的航线。这种映射叫测地映射，很容易实现，只需从球心将球面映射到某个适当的切面。[3]

79° 名诗选

兰佐斯（Cornelius Lanczos）在他精彩的《历史上的空间思想》（*Space Through the Ages*）中，对忽略了很多东西表示抱歉。他说："这样性质的一本书，不可能以完备为目标，也不可能从任何意义希望它是完备的。我们选择伟大的几何思想当然也是如此——它更像一本诗歌名作的选本。"

80° 对偶语言

兰佐斯在《历史上的空间思想》中论及射影几何的对偶原理时说："射影几何的最惊人现象之一，是点线对偶性。我们设想一下，有人根据外文的课本研究射影几何。因为疏忽，他错译

3 墨卡托投影映射将球面上纬度为 θ、经度为 φ 的点映射到笛卡儿坐标为 (x, y) 的平面的点：

$$x = \varphi,$$

$$y = -\log\tan\theta/2$$

北半球到北极点切平面的测地映射，将球面上纬度为 θ、经度为 φ 的点映射到平面上极坐标为

$$\alpha = \varphi,\ r = \tan\theta$$

的点。（原注）

了两个词，把意思为‘点’和‘线’的词错译成了‘线’和‘点’。奇怪的是，他不可能发现他的错误，因为，尽管解释不同了，所有命题仍然是正确的。”[4]

4 此句的引用经纽约科学出版社允许。（原注）

81° 盲人几何学家

解析几何的创立，是改变几何研究局面的大发展。因为代数思维的抽象特征，许多无法预料的进步成了现实；不过，从几何图形的观察所产生的美感，也在一定意义上失去了。人们不再“看”空间发生了什么。即使是个盲人，从没见过直线、圆、椭圆或球，也能研究那些图形的性质。几何发现成了常规的程序操作，几何向所有的人敞开了大门——即使那些没有空间感觉的人。当我们研究三维以上的高维空间的几何时，也在一定程度上变成了盲人几何学家。

82° 神谕的真意

公元前427年，柏拉图出生在雅典（或附近），大概就在那年，一场瘟疫肆虐希腊，夺走了大部分雅典人的生命。有故事说，得洛斯（Delos）岛的一个公民代表被派往特尔斐（Delphi）的阿波罗神殿，看神将如何安抚众生，消灭瘟疫。据说神谕的意思是，诸神不满阿波罗像的正方体底座的尺寸，要求把底座扩大一倍。这就引出一个问题，做出体积为两倍的立方体的边长。希腊人费了很大气力，还是没能从理论上得到一个只用圆规和直尺完成的精确解。[5]

5 倍立方问题的来源，参见《走进数学圈》66和246。

很难相信诸神不会满意一个足够近似的两倍体积的底座，不过对希腊人来说，从理论上精确解决这个问题，才真有科学价值。有人问柏拉图神谕的真意是什么，他给了一个个性的回答。

他说，神这样回答，是为了告诉这些希腊人，他们可耻地忽略了几何的科学追求，要重新唤起他们对纯几何研究的兴趣。

83° 几何的起源

很多历史学家提出一个论题，认为我们可以在古希腊的土地测量实践中找到几何的开端。实际上，几何（geometry）一词的意思就是“丈量土地”。另一种观点认为，几何起源于宗教仪式和神坛的建造。第三种观点也有道理——几何的开端要在星空去找。

美索不达米亚的牧羊人在寂寞的夜晚什么也不做，就是仰望明媚的巴比伦夜空，观察月亮和恒星的路径，留意星座的归来。日月的规则运行，唤起了古人的好奇，渴望着去理解那些天文事件背后的奥秘，预言它们的再次出现。于是，原始的天文学点燃了自然科学的星火，奠定了几何理论的起点。点点恒星引出了“点”的概念，星座的图像产生了三角形、四边形和其他直线图形，而圆是太阳和月亮的边缘。几何思想就以这种纯粹下意识的方式，从简单的星空的观望中，朦胧地开始了。这个观点是兰佐斯在他那本优美的《历史上的空间思想》中提出的。

84° 几何学家与分析学家

《走进数学圈》第四象限说起数学家与博物学家，说植物学家好，数学家不好。这令我想起道格拉斯（Jesse Douglas），他常说几何学家好，分析学家不好。

我 30 多岁在莫斯科的时候，听说在世纪之初，大学的自由主义学生都去听几何学家卡甘（Kagan，犹太人）的课，而反动分子都听分析学家伊格洛夫（Egorov，保守的反犹太分子）的课。

（斯特洛伊克）

85° DIN

德国工业标准局（DIN）是德国的标准委员会，建议各种纸张（如印刷纸、打印纸、信纸、便笺纸等）的形状和尺寸，应该尽可能节约地选择，在将大纸裁剪成小纸时浪费最少。为了实现这种纸张的节约经济，我们选择纸张的比例，在裁成两半时，小纸的形状和原来的一样。这样，一张打印纸在一分为二时，能成为两张小的相同形状的适合个人通信的信纸，而每张信纸又能分成两张更小的形状相同的便笺纸。如果标准纸张的长宽为 x 和 y，那么经一次裁剪后，

$$x:y = y:x/2$$

从而 $x = y\sqrt{2}$。

$\sqrt{2}$接近黄金比 $(1+\sqrt{5})/2$，于是最节约的矩形纸同时也有最漂亮的形状，因为它与艺术家们钟情的黄金矩形没多大差别。

86° 初恋的感觉

罗素（Bertrand Russell，1872～1970）11 岁就开始研究欧几里得的《原本》，18 岁的哥哥是他的老师。他在《自传》里说，“这是我一生的重大事件之一，像初恋那样令人眩目。我不曾想到世上还有那样美妙的事情……从那时起……直到我 38 岁，数学是我的主要兴趣和主要的快乐源泉。”

87° 丢勒的近似图

尽管不能用圆规和直尺将任意角三等分，但可以用它们做出很好的近似等分。等分的一个绝妙例子是著名雕刻家和画家丢勒

在 1525 年实现的。将给定∠AOB 当作一个圆心角（图 60）。令 C 是弦 AB 靠近 B 点的三分点（这可用直尺和圆规来作）。自 C 作 AB 的垂线，分割圆于点 D。以 B 为中心、BD 为半径作圆弧交 AB 于 E。令 F 为 EC 的靠近点 E 的三分点。然后，以 B 为中心、BF 为半径作圆弧割圆于 G。于是，OG 就是∠AOB 的三分线。可以证明，三分的误差随∠AOB 的增大而增大，不过对∠AOB = 60°，误差大约只有 1″；对∠AOB = 90°，误差约为 18″。

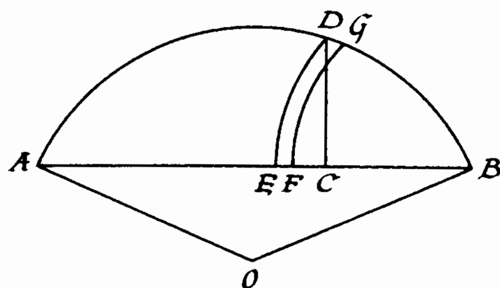


图 60

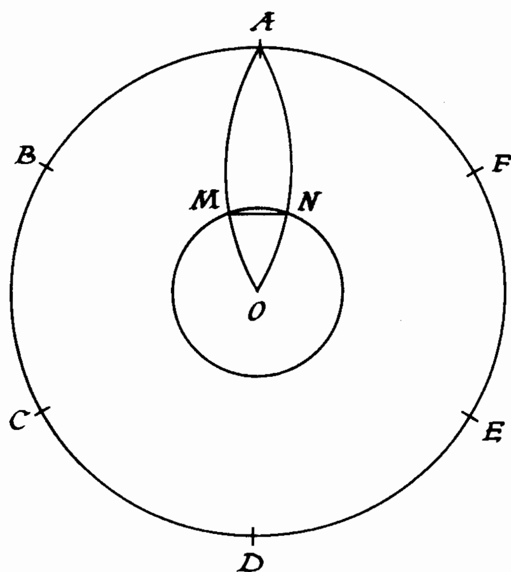


图 61

丢勒还提出了内接于半径为 r 的圆的正 9 边形的近似作图方法，如图 61。画一个与已知圆同心的半径等于 $3r$ 的圆周，将圆周 6 等分于点 A，B，C，D，E，F。以 F 和 B 为圆心作通过 A 和公共圆心 O 的圆弧，二圆弧分别交给定圆于 M 和 N。于是，MN 近似为所求九边形的一边。这个近似不是很好。更好的近似是以 $\angle NOB$ 的一半作为所求九边形的圆心角。

88° 两个魔鬼定义（daffynition）

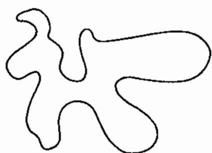


图 62

拓扑学是研究乱画的图形（图 62 画的是一个拓扑圆）的学问。拓扑学家是不懂得区分面包圈和咖啡杯（图 63）的人。

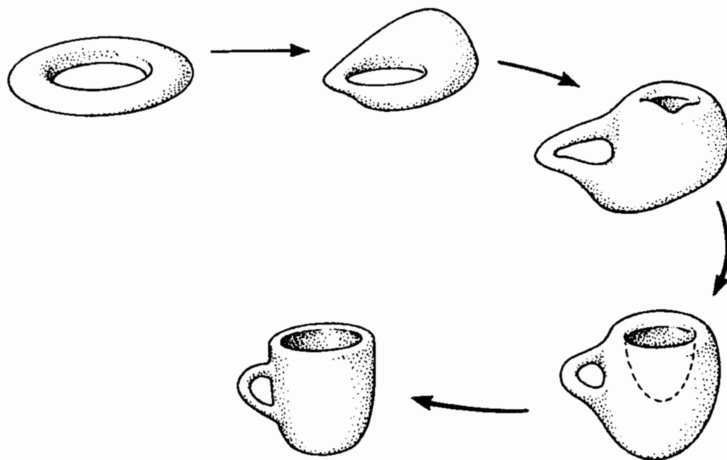


图 63

89° 拓扑学的诞生地

18 世纪前 25 年的某个时候，普鲁士古老的哥尼斯堡在筹划一个庆祝活动。活动之一就是环城大游行。但哥尼斯堡城坐落在普雷格尔（Pregel）河，河流在距此 4 英里半的地方流入波罗的海，那儿有个叫 Kneiphof（啤酒园）的小岛，本身却缺少淡水供

应。城里有7座造型优美而各具特色的桥，连接普雷格尔河的两岸（图64）。哥尼斯堡大教堂坐落在岛上，毗邻它的是哥尼斯堡大学和哥尼斯堡最著名的儿子、大哲学家康德的墓地。游行计划从教堂出发，经过每座桥一次（而且只能一次），然后回到教堂。但不论怎么努力，他们都没能画出希望的路线。

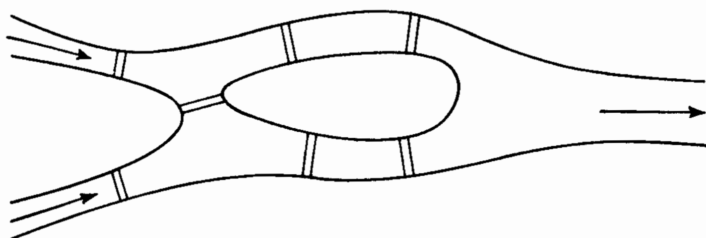
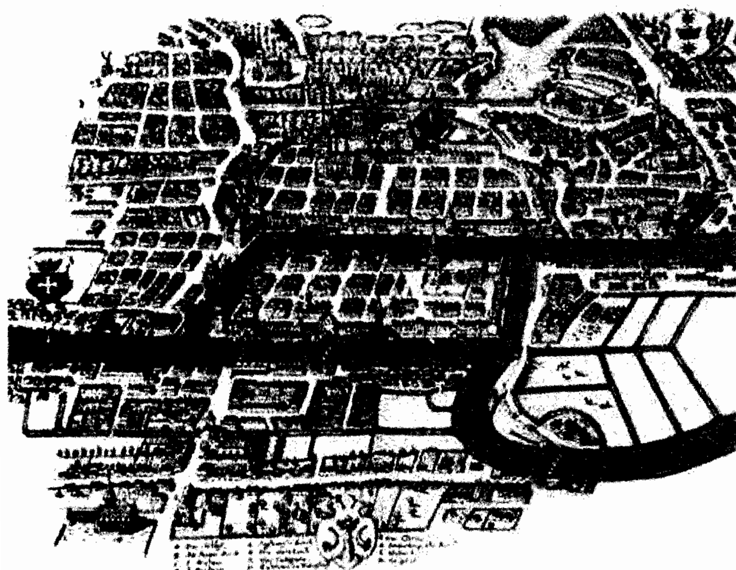


图64

问题最后传到了瑞士大数学家欧拉，他在1736年向圣彼得堡科学院提交了一篇关于路线图的论文，考虑了一般的任意数目



哥尼斯堡城和那七座著名的桥

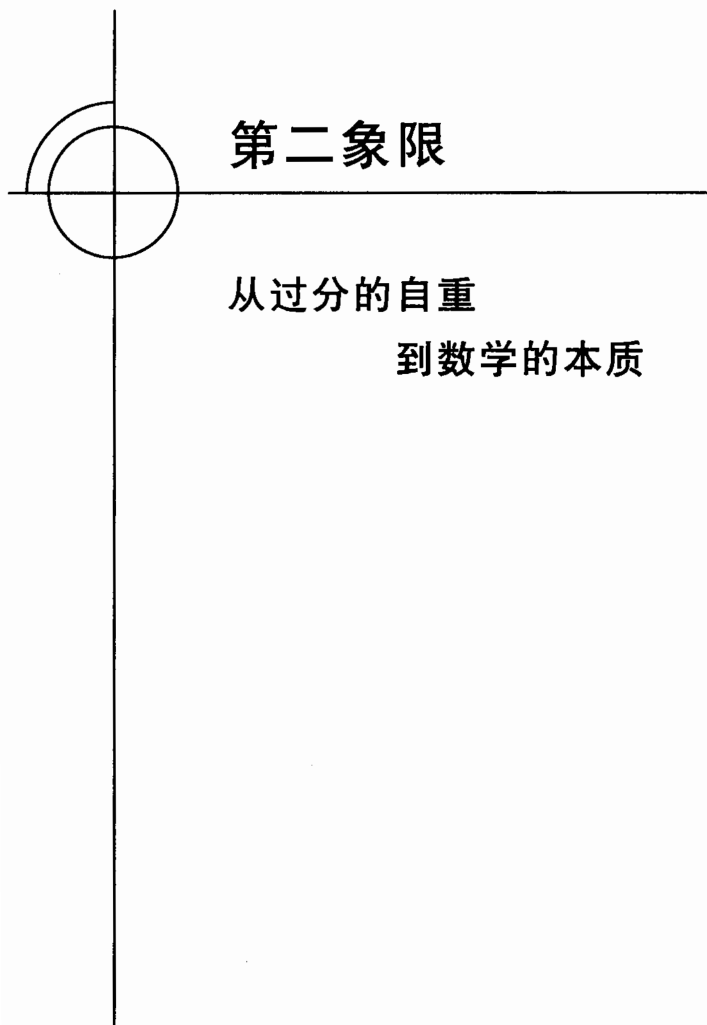
的岛桥问题。在这篇论文里，他证明了原来那个哥尼斯堡7桥问题是不可能的，拓扑学也从此开始了。

今天，哥尼斯堡成为加里宁格勒，桥比从前更多了。往昔的学术氛围没有了，笼罩着军事的紧张空气，它现在是前苏联最大的海军基地。作者的数学博物馆（MMM）[6] 曾在齐伯林（Graf Zeppelin）飞艇上鸟瞰美丽的哥尼斯堡城和那七座著名的桥。也不知那照片现在到哪儿去了。

6 MMM，My Mathematical Museum（我的数学博物馆），见《重游数学圈》R246，247，248和249。（原注）

90° Q. E. D.

过去在几何定理证明的末尾习惯加上 Q. E. D.（代表“quod erat demonstrandum”，意思是“那就是需要证明的”）。今天，在几何课上，我们可以在特别简单而直接的证明后加 Q. E. D.，告诉同学们它代表“证明很容易”（quite easily done）。另外，同样的字母也可以加在特别优美而灵巧的证明后面，告诉大家它的意思是“绝妙的证明”（quite elegantly done）。



第二象限

从过分的自重到数学的本质

发生在美国的故事

这个单元我们讲几个美国数学家的故事：奥斯古德（William Fogg Osgood，1864 ~ 1943），18 世纪末和 19 世纪初哈佛大学伟大分析学家；卡斯纳（Edward Kasner，1878 ~ 1955），20 世纪上半叶哥伦比亚大学杰出几何学家；爱因斯坦（Albert Einstein，1879 ~ 1955），世界闻名的数学物理学家，尽管出生在德国，但也可以说是美国人；摩尔（Robert Lee Moore），美国第一个拓扑学家；维纳（Norbert Wiener，1894 ~ 1964），麻省理工学院（MIT）的天才怪人；金伯（Spofford Kimball），四分之一世纪里一直受人爱戴的缅因州立大学数学系主任。最后讲 5 个和《美国数学月刊》问题专栏有关的故事，本书作者曾和它有过 25 年的编辑关系。要写整整一卷美国数学和数学家的故事，也是很容易的。

91° 过分的自重

据说奥斯古德在哈佛名望极高，也很看重自己，每天早上起床时，总是从镜子看着自己说："早晨好，奥斯古德教授。"（斯特洛伊克）

92° 真正的漫步者

法迪曼（Clifton Fadiman）讲过一些卡斯纳（曾经是哥伦比亚大学古怪而可爱的安德里安（Adrian）数学教授）的有趣故事，[1] 下面是其中的 3 个。

卡斯纳喜欢一个人漫步，特别在新泽西帕里萨德斯（Pali-

1 法迪曼曾以他可爱的《数学喜鹊》（*The Mathematical Magpie*, Simon and Schuster, 1962）来纪念卡斯纳。（原注）

sades）和纽约的时候。为了减轻负担，少拿随身物品，他只带茶和糖，而把别的东西，如茶壶和不易腐烂的食物，放在一系列午餐盒子里，藏在一路的秘密地方。

93° 登山者

卡斯纳在布鲁塞尔过暑假，每个暑假都组织登山活动，攀登比利时的最高峰。他说他在每年一度的登峰中体验着巨大的满足。人家问他那峰有多高，他会回答："海拔 12 英尺。"

94° 悬念

卡斯纳从来只穿宽松的黑白毛混纺外套。他很早就把腰带当外来新鲜玩意儿给抛弃了，所以得费很多工夫来穿裤子。他讲课时，常有人怀疑他能不能在裤子不掉下来之前把课讲完。

95° 美食家

卡斯纳坚持认为，纽约最好的食品要在自动售货机里去找。他偶尔也去一流的餐馆，不过是为了更坚信自己的观点。

96° 爱因斯坦与宗教

爱因斯坦铭刻在心的是宇宙事件以某种方式服从一般的理性法则。这些法则的运行和它们背后的理性的动力，在爱因斯坦看来是他称为上帝的宇宙智慧的明证。另一方面，他不能接受人格化的个人的上帝——一个报复和惩罚的上帝，一个博爱和宽容的上帝，或任何别的什么宗教法典需要的上帝。他觉得那些品质也许是对先知教诲的误会或误传。于是，他称自己是"虔诚的宗教不信仰者"。

97° 奖赏

普林斯顿的一个小女孩儿总为算术家庭作业感到烦恼。可突然她的作业成绩大大提高了。老师很惊讶，问她是怎么进步的。“噢，”小女孩儿说，“梅瑟街有个很好的老头儿在帮我。”老师想最好把这事告诉小孩儿的母亲。母亲感到非常不安，就去看那个好老头。“可爱因斯坦教授，您干吗费时间帮我的女儿？您得到什么好处了吗？”爱因斯坦说：“我确实得到了好处。我每次帮她她都给我一根棒棒糖。”（斯特洛伊克）[2]

2 故事的另一版本见《回归数学圈》（R65）。

98° 爱因斯坦和支票

据说，爱因斯坦收到普林斯顿高等研究院的第一张支票时，拿支票背面画数学图形，不久这张纸片就丢了。从那以后，他的薪水支票就直接转给爱因斯坦夫人保管。

99° 恶作剧

摩尔喜欢玩儿善意的恶作剧。听说他在邀请一些聪明的数学研究生去他家晚餐后，会用码尺测量他们的身高，其实那码尺只有 35 英寸长。

100° 约会

维纳在《我是一个数学家》中告诉我们，他第一次见伯利甘（George Bouligand）和莱登斯坦（Leon Lichtenstein）时，他们是怎么引见自己的。伯利甘在佩迪尔（Pertiers）火车站等维纳，醒目地手拿一篇维纳的文章。后来在德国，莱登斯坦也这样

在火车站等维纳，他拿着一篇写着主要势论公式的文章，那是为了纪念维纳而写的。莱登斯坦和维纳是表兄弟。

101° 维纳是怎么蓄胡子的

大约在 1927 年夏天，维纳和斯特洛伊克[3] 徒步走进了新汉普郡的总统山脉。从那儿回来时，两人长满了长长的胡须。斯特洛伊克被维纳说成是伦勃朗的画像，马上就把胡须剃了，而维纳夫人则把维纳的胡须修饰得恰到好处，从此他就蓄胡子了。

3 斯特洛伊克（1894～2000）是受人尊敬的几何学家和分析学家，更是国际知名的数学史家。2000 年 10 月 21 日去世，享年 106 岁，大概是数学圈里最长寿的人。1926 年应维纳邀请到了 MIT，直到 1960 年退休。他影响最大的著作是以马克思主义观点写的《数学简史》（初版于 1948 年），50 年代就有了中译本（科学出版社，1956）。



维纳的胡子

102° 维纳式机智

一群美国数学家在墨西哥瓜达拉加拉（Guadalajara）参加一个数学会议。其中有约翰霍普金斯大学的穆尔纳罕（Francis Murnaghan）教授，他很难适应墨西哥的饮食。一天早晨，罗森布鲁斯(Arturo Rosenblueth)用英语随便说了一句，“我觉得挺好，句号！”维纳正好在旁边，应声说：“穆尔纳罕觉得难过，冒号。”

103° 现代物理学家

维纳描述当时物理学的状态说："现代物理学家在星期一、三、五是量子物理学家，星期二、四、六是引力的相对论的学生。星期天他什么也不是，而是祈求上帝，但愿某个人，最好是他自己，能发现两个理论的和谐统一。"

104° 谈工作

海森伯30多岁在MIT时，维纳常来看他，一起谈数学。海森伯（W. Heissenberg）对我们说："你们不认为维纳教授把数学看得太重了吗?"（斯特洛伊克）

105° 维纳病

《控制论》（*Cybernetics*）出版后，维纳常为狂热的追随者感到不安，他们似乎在书中找到了什么包治百病的万能药。维纳记得马克思说过他不是马克思主义者，于是对一个朋友说："我不是维纳主义者。"他朋友回答："是的，可有好多人患了维纳病。"（斯特洛伊克）

106° 没讲完的故事

《走进数学圈》第358个故事没有讲完。维纳从餐厅出来，和那个同学谈话。谈话结束后，维纳问："你还记得，我们刚才见面时，我是朝哪个方向走的吗?"学生告诉了他。"哦，"维纳说，"那我已经吃过午饭了。"（斯特洛伊克）

107° 年轻的数学家如何靠天才保护自己

维纳讲过 MIT 数学系一个老师的有趣故事。那个年轻人后来去慕尼黑学习，在那儿卷入了与一个德国军官的决斗。为了躲避决斗，他利用了自己选择武器的权利。他选择弓和箭，然后请几个机灵的朋友四处散播谣言，说他曾经是射箭冠军。他在 MIT 的同事从《纽约时报》巴黎版读到这件事情后，给他寄去一封声称是来自射箭协会的信，授予他学会最高荣誉。

108° 狂想者

金伯教授在奥罗那缅因州立大学做了多年的数学系主任，他有一个办法来劝阻那些想三分角、倍立方和化圆为方的人。他收到某个狂想者的所谓成功作图时，会很礼貌地回复说他审查这些图的费用是 100 美元。这就阻挡了好多烦人的来信。

109° 芬克尔教授



《美国数学月刊》从 1894 年创刊以来，一直是一个关于问题的杂志。创始人芬克尔（Benjamin Franklin Finkel）自己就是一个狂热的问题爱好者，还写过流行一时的《芬克尔解数学题》。

芬克尔教授喜欢讲自己的一段经历。15 岁时，他在俄亥俄一所乡村小学校读书时，一个流传在乡间的无聊问题激发了他的数

学兴趣。同父异母的哥哥在村里的杂货店听到一群人在讨论那个问题，就带回来让他思考。他问了学校的老师，老师向他指出它大概可以用几何来解决。这个回答并不让芬克尔满意，因为他从没读过几何书。他想用他在雷（Ray）的《算术》里看到的测量学方法来解决。[4] 几年后，他的努力成功了。这儿说的那个问题是：“有一个直径为12英尺的球，放在60英尺高的一根柱子顶上。球上站着一个身高6英尺的人。球下面的土地有多少是他看不见的？”

这个问题后来进了《芬克尔解数学题》，给芬克尔留下了难忘的印象。他一生都大力鼓吹好的“无意义的”问题一样有着教学意义，而不仅是某些现代教育者们坚持的所谓“有实践意义的”问题。

《美国数学月刊》的计划即将开始行动时，芬克尔四处寻访助手，最后邀请了弗吉尼亚蒙特里的柯罗（John M. Colaw）教授。他没见过柯罗，但很欣赏他为《学校访问者》（芬克尔是热心的读者）写的东西，其中多数是关于数学问题的。

因为两个人对数学问题的兴趣，也因为一个新杂志那时很难得到一流作者的高水平稿件，《美国数学月刊》在头几年里只不过是一个以数学问题为主的杂志，也就不足为奇了。它在标题页就开宗明义地描述了自己的宗旨：“致力于纯数学和应用数学的问题解答、数学学科的论文、著名数学家的传记，等等。”

在《月刊》第一期的导言里，芬克尔写道，“解数学题是数学研究的最低形式，……但其教育价值不可估量。它是步入更高的创造性研究和探索领域的阶梯。许多休眠的头脑就通过把握某个问题而活跃起来。”我们还可以更有力地说，数学正是通过问题而发展，靠自己的靴带提升了自己的地位。每一篇研究论文，

4 这是 Joseph Ray 在19世纪初出版的一套初级算术教程，在美国影响深远，至今还在重印（20卷）。它的编排独具特色，引导孩子经历数学的三个阶段（操作、想象、抽象）。现在也成为人们准备 ACT 和 SAT 考试的参考书。



每一篇博士论文，每一个数学新发现，都是通过解决某个问题而衍生出来的。提出恰当的问题，不仅是把有希望的学生引向数学研究的恰当方式；发现重要问题的能力，也是成为创造性数学家的基本要求。

110° 非凡的解题者

《美国数学月刊》1894 年创刊时，杂志的问题专栏立刻吸引了泽尔（G. M. B. Zerr）教授，一个化学工程专家、教育管理者，也是多才多艺的数学家。1910 年去世前，泽尔在杂志的前 17 年为它的贡献在质量和数量上都远远超越了所有其他解题专家。他在那 17 年里收集了令人难以置信的 1697 个问题，在同一个时期，他还以同样的热情为当时的许多其他杂志的问题专栏奉献自己的作品。

111° 两个奖

《月刊》有两个有奖的问题。其中一个就发表在第一期，列为代数问题 43（1894 年，433 页）。密西西比库珀伍德（Cooperwood）的歇尔兹（F. M. Shields）提出一个复杂的时间 - 速度 - 距离问题，并向"第一个给编辑寄来正确答案的人提供佛罗里达圣安德鲁斯的一块城市地皮"。奖励被泽尔领走了。

第二个问题发表在《月刊》1929 年 12 月号。衣阿华州得梅因（Des Moines）的柯雷（S. A. Corey）在提出问题 3402 时，提供了 10 美元，给"编辑认为答案或评论最有启发意义的人"。这个问题至今还列为《月刊》的未解问题之一，所以奖金还没人领走。

112° 从密苏里来的学生

大约 1946 年，克里（L. M. Kelly）在密苏里（Missouri）大学给新生讲解析几何时，偶然给同学说起，如果跑道内圈是椭圆，而且宽度不变，那么跑道外圈不一定是椭圆。学生中真有一个是“从密苏里来的”，他要老师证明外圈不一定是椭圆。在学生的理解程度上，这可不是容易的事情。结果，克里教授在《月刊》1947 年 1 月号提出了问题 E753：“怎么能让初等分析的学生相信，如果跑道内圈是非圆形的椭圆，而且宽度不变，那么外圈不是椭圆？”当年的 9 月号发表了问题的解答，不过也许超出了学生的理解力。

113° 丘比特问题

1946 年 10 月的《美国数学月刊》发表了一个迷人的小问题 E740：“在平面上给定 5 个点，证明我们能选择其中 4 点确定一个凸四边形。”问题是当时在中国上海的艾丝特（Esther Szekeres）提出的，1947 年 5 月发表解答时，它被冠以“丘比特问题”的名称。无疑，很少有读者明白为什么问题会得到那样一个特别的名字。其实，问题不是艾丝特提出的，而是艾丝特和她先生乔治（George Szekeres）的一个亲密朋友提出的。那个朋友不想泄露自己的名字，他说，就是这个问题及其推广,[5] 像一根红线把艾丝特和乔治牵到一起了。他请求以艾丝特的名义发表问题。问题专栏的编辑在了解那个浪漫故事以后，就在发表解答时给它起了那个名字。

5 埃尔多斯（Paul Erdos）和乔治在《组合数学》(*Compositio Mathematica*, vol. 2 (1935), pp. 463 ~ 470.）的一篇文章里讨论了问题的一般情形。从平面的 9 点可以选出 5 点来确定一个凸 5 边形，但还不清楚是否能从平面的 $2^{n-2}+1$ 点中选出 n 点来确定一个凸 n 边形。在 n 维面中给定 $n+3$ 点，可以选出 $n+2$ 点来确定一个凸多面体。（原注）

这个问题更一般的意思是，大量的无序中总存在有序。例如，我们总可以从星空看到我们想象的某些形象。

在 英 国

下面我们讲20个英国数学家的故事，从1803年出生的布里萨德（John Blissard）说到1885年出生的里特伍德。其他的几位是德摩根（Augustus De Morgan，1806～1871）、西尔维斯特、托德亨特（Isaac Todhunter）、克里弗德（William Kingdon Clifford）、爱丁顿和格塞特（William Sealy Gosset）。数学家弗伦德（William Frend）、弗罗斯特（A. H. Frost）、科特（Roger Cotes，1682～1716）、牛顿、塔克（Robert Tucker）、哈代、麦克法兰（Alexander Macfarlane）、哈尔莫斯（Paul Halmos）、维伯伦和维纳也会偶尔出现——除了后面四位，也都是英国人。他们的故事在前面两圈里已经讲过很多了。

114° 布里萨德布道

布里萨德在数学史上的名声几乎只在他的“符号方法”或“哑运算”（*umbral calculus*）。他1803年出生在英格兰北安普顿，父亲是那儿的医生；1875年，他在汉普斯特德诺雷斯（Hampstead Norreys）的一个不起眼的小村子去世，他曾在那儿勤勤恳恳做了46年的牧师。从汉普斯特德诺雷斯辞职后，他和妻子养育了12个孩子，差点儿完全埋没了他的数学才能。不过，从来没人听他对命运有过什么抱怨，他也通过思考数学问题和私下辅导几个学生的剑桥数学考试，保持了一个活跃的数学灵魂。

布里萨德忠于他的教职，也喜欢数学。据说，随着年纪增大，一心两用的他经常心不在焉。下面就是这位平易近人的牧师的一个故事。在那些日子，如果布道内容太少，去教堂听讲的人

就会觉得受蒙骗了。有个星期天，布里萨德无意间满足了他的教区居民的愿望。他讲的是《诗篇》的第 23 首，[6] 在整个布道过程中，他逐句解说，每句话都演绎出一篇布道文来。讲到“他使我的灵魂苏醒”时，话已经很长，结果他忘了讲到什么地方。于是他又演绎了一回“他使我的灵魂苏醒”，还是长篇大论，却和先前讲的一点儿都不同。最后，他又忘了刚才讲的，又对那句话发表了一篇不同的宏论。夫人后来说：“三次讲话大不相同，而每次都很精彩。听众一点儿也不介意。”

6 《重游数学圈》(R197) 有这首诗的“篡改”。原诗传说是大卫写的。

115° 布里萨德的宽容

布里萨德 1875 年去世时，《水星报》(*Reading Mercury*) 和《伯克郡报》(*Berks County Paper*) 报道说：“他 [布里萨德] 的一生很少树敌，即使房子被恶毒的仆人放火烧了，他也在她认罪时宽恕了她。”

116° “独立”

德摩根出生在印度，父亲和祖父也出生在那儿。因为这一点，他常说自己既不是英格兰和苏格兰人，也不是爱尔兰人，而是“独立的”不列颠人——这个词儿本是专门用来说牛津和剑桥的那些不属于他所在大学的某个学院的学生。

117° 一个特别的人

德摩根的朋友布鲁厄姆爵士 (Lord Brougham) 就任爱丁堡大学校长时，学校评议会决定授予德摩根荣誉 LL. D 学位。德摩根拒绝了荣誉，声称那个学位用于他是不恰当的。他曾把自己的名字写成

Augustus De Morgan

H·O·M·O·P·A·U·C·A·R·U·M · L·I·T·E·R·A·R·U·M[7]

德摩根不喜欢乡下，当全家去海边度假或不列颠学会在乡间开会时，他都在城市的喧闹中。他说他感觉好像苏格拉底，那位老人说过，离雅典越远，也就离幸福越远。

德摩根从不参加皇家学会的会议，也从不想加入那个学会。他从没为任何选举投过票，他为自己感到骄傲的是，他从没参观过下议院、伦敦塔和威斯敏斯特大教堂。

7 拉丁文有成语 homo multarum litterarum（博学之人），德摩根故意说自己是“无知的人”。

118° 德摩根夫人

德摩根定居伦敦时，遇到了志趣相投的朋友弗伦德，他曾以二等成绩通过剑桥的数学荣誉考试，是学会的算术家和保险统计师，与德摩根有相似的宗教观。1796 年，弗伦德出版了一本《代数原理》，反对用负数。弗伦德住在伦敦郊外的一所乡村房子里，那曾是著名作家笛福（Daniel Defoe）和伟大的传教士、赞美诗作者瓦茨（Isaac Watts）的故居。

德摩根很会吹长笛，又是快乐的伙伴，因而成了弗伦德一家欢迎的常客。结果，在 1837 年，德摩根 31 岁时，和弗伦德的一个女儿索菲娅（Sophia Elizabeth）结婚了。索菲娅对招魂术感兴趣，成为德摩根夫人后，写了一本描述神异现象的书（如敲击桌子、转动桌子、墓穴出声等[8]）。丈夫去世后，她还出版了他基本完成的趣味娱乐读物《悖论集》。

8 几个人围坐在桌前，手放在桌面，满怀期待地等待一定时间，就能听到敲击声，或者看到桌子的一条腿自动抬起来了。这就是 19 世纪 50 年代流行于欧洲和北美的一种灵异活动（叫 table-rapping 或 table-turning），法拉第曾在 1853 年研究过它们。

119° 定积分

数学史上有个时期流行为定积分清单增加新的公式，例如

1. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/4$,

2. $\int_0^\infty dx/(1+x)\sqrt{x} = \pi$,

3. $\int_0^\infty (\cos x dx)/x = \infty$,

4. $\int_0^\infty (\tan x dx)/x = \pi/2$,

5. $\int_0^\infty (\sin^4 x dx)/x^4 = \pi/3$,

6. $\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{(\pi/2)}/2$,

7. $\int_0^1 x\log(1+x) dx = 1/4$,

8. $\int_0^1 (\log x dx)/(1+x) = -\pi^2/12$,

9. $\int_0^{\pi/2} (\log\tan x) dx = 0$.

数学公式表里，这样的积分公式满纸都是。对这样的风气，西尔维斯特说，“可以希望，每个走向数学帕尔纳索斯山（Parnasus）的朝圣者，[9] 都会在旅途的某一站停下来，写出一两个定积分公式，为那些‘普通股’增加一分潜力。”

9 帕纳索斯是希腊南部的一个山峰，传说是太阳神和缪斯女神的灵地。

120° 音盲

英国数学家托德亨特（Isaac Todhunter，1829～1884）写了很多很好的教科书和详尽的数学专门领域的历史书，但他对音乐没有一点儿鉴赏力。他声称他只知道两支曲子——一支是《天佑女王》，而另一支不是。他说，他是看到人们站起来了才知道

是那支曲子。[10]

10 《天佑女王》(God save the Queen)是英国国歌(也是一些英联邦国家的国歌)。

121° 一个传说

麦克法兰说，下面的故事，即使不是托德亨特的，也很适合他。“有一次，有个同学在剑桥数学荣誉考试得了优等，为了庆祝胜利，他请大家聚会喝酒。6个客人围着一张桌子坐下。主人锁了门，把一瓶葡萄酒放在桌上，热情地宣布，‘如果还剩一滴，谁也不能出门离开。’”

122° 初露才华的数学天才

看一个伟大数学家（而不是显眼的神童）是不是在小时候表现出对数学学科的爱好，是很有意思的。有几个预言性的故事就说的是克里弗德的少年时代。例如，在6岁时，父母让他在阿姨麦克劳德（Mcloed）夫人那儿过了一个短暂的时期。一天，阿姨让孩子上床睡觉时，发现他在沉思，就问他想什么。孩子笑了，望着阿姨说：“安妮阿姨，我想你不会明白的。”在阿姨追问下，孩子才说他在计算“铅笔刀要多少个边缘才能绕马车轮子一圈”。他把计算结果连同车轮的大小给了阿姨。后来，问题和答案传给了孩子的叔叔，一个不错的数学家弗兰克（Frank Kingdon）。孩子的计算基本正确，只差了一点儿。

123° 放风筝

克里弗德在短暂的34年的生命中，一直保持着一颗童心，从不丢弃少年时代的游戏和娱乐。他的娱乐活动中有一项是放风筝。1863年，克里弗德18岁，给米勒先生写信说：“几乎从我放风筝的时候起（现在也没放弃），我就在想，风筝线在风的作

用下是怎样活动的。一天，通过初步实验，我发现内在的方程似乎并不难获得。以后有了结果，我会写信告诉你。”风筝线的疑问最后成了 1879 年 7 月和 1880 年 5 月《教育时代》杂志的问题 6009。克里弗德在 1879 年 3 月就去世了。

124° 解谜

令人尊敬的珀西瓦尔·弗罗斯特（Percival Frost）曾向哥哥 A·H·弗罗斯特（曾在印度传教）夸奖克里弗德的神奇的空间感觉。这时，哥哥从印度带回一个复杂的三维谜题：由很多碎片连锁拼接成一个球面，问题是把碎片解开。哥哥简直不相信珀西瓦尔说的小克里弗德的事情，就叫他把小孩儿请来喝茶，看他能不能解开这个空间谜题。孩子很快来了，谜题也给他了。克里弗德没有去摸那个球，而是仔细看了好几分钟。然后，他拿起球来，在弗罗斯特惊讶的目光下，很快把它解开了。

125° 赞美

两个前程远大的数学家科特和克里弗德都在 34 岁就过早地去世了。牛顿曾这样说科特：“如果科特活着，我们也许早就明白了某些事情。”（见《走进数学圈》228。）1882 年，塔克编辑克里弗德的数学论文，把这句话写在了扉页上：“如果他活着，我们也许已经明白了。”

126° 爱丁顿谈第四维

爱丁顿在《空间、时间和引力》中评说了第四维的概念：

> 不论四维世界的理论会有多成功，我们的内心都难免回

荡着一种声音："在你思想的背后，你知道第四维是毫无意义的。"我想那声音在过去的物理学历史中一定经常出现。如果说我面前坚实的书桌是一堆在虚空空间中高速运动的电子，那空间相对于电子尺度就像太阳系中行星之间的空间那样广阔——这话有什么意思呢！如果说稀薄的空气正在以14磅的负荷把我挤压成1平方英寸，这话有什么意思呢！如果说我从望远镜看到的明明是现在的星团却是50 000年前的一瞬，这话又有什么意思呢！别让我们被这种声音诱惑了，它是不可信的……

我们在未知的海边发现了奇怪的足迹，我们设计了一个又一个理论来解释它的来源。最后，我们成功再现了留下那足迹的生灵。看吧，它就是我们自己！

127° 学生

英国统计学家格塞特以"学生"的名义发表了小样本统计理论的先驱性著作，正如哈尔莫斯说的，他这样做，也许是为了不让他的雇主（著名的黑啤酒制造商们）为难。

128° 教训

里特伍德写他的数学教育时，讲了一个他做过的学习实验。复活节时，他要准备考试，于是决定躲在哈特兰码头，那儿风景优美，而且远离火车站。他决心戒烟，埋头数学研究，只在晚上用诗歌和哲学来放松自己。房间窗户朝着大海，他一进屋就把烟斗和烟扔进水里。才过一天，他就从严格的计划中回到从前了，只能做一点儿研究。这次教训告诉他，严肃的工作最好是在熟悉的环境下按部就班地进行。

129° 里特伍德与戴德金分割

在戴德金分割中，所有有理数集合被分为两类，L 和 R，使 L 没有最大数，而且它的每个数都小于 R 的每个数。正是里特伍德第一个用逻辑符号 L（代表左）和 R（代表右）来表示这两类的，他很得意这个小小的贡献会得到学生的欢迎。

在哈代《纯数学》第一版中，这两类是用字母 T 和 U 表示的；后来的版本才用 L 和 R。哈代在后来的版本中提到了许多里特伍德的东西，但没说字母 L 和 R。当里特伍德开玩笑地指出应该说说那个贡献时，哈代拒绝了，他认为说那些微不足道的事情会令人反感。里特伍德说这不过是压迫者的正常反应："受害者想要的不是他自己最感兴趣的。"

130° 里特伍德与哈代

里特伍德读了哈代写的关于著名印度数学家拉玛奴扬的文章的第一个校稿。哈代在文中写道："正如某人说的，每个正整数都是他的私人朋友。"读到这里，里特伍德评论说："我想知道那是谁说的；我希望是我说的。"在最后的校稿中，里特伍德看到（这也是最后印刷的形式），"正是里特伍德说过这样的话，每个正整数都是他的私人朋友。"

131° 里特伍德与维伯伦

维伯伦曾为路径几何做过三次演讲，在一次演讲的最后，路径演绎成下面的形式

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}=\frac{t-d}{p}.$$

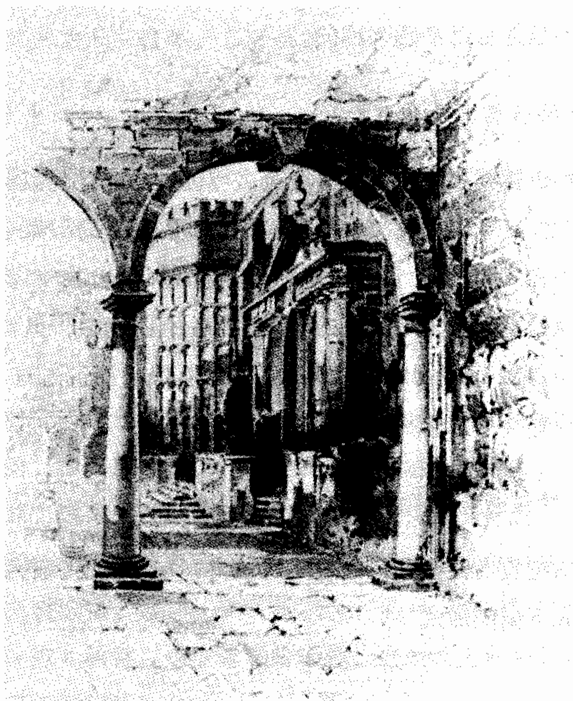
这时，维伯伦停下来，简单说了说可能出现的结果，然后用这样的话结束了演讲："我自己做自己的施洗者约翰。"对这一点，里特伍德（他听了演讲）评论说："那是在你自己的路线走直了以后。"

132° 里特伍德语录

"一个好的数学笑话比一堆平庸的论文更好，而且是更好的数学。"

133° 里特伍德说数学登山技术

在英美数学家中，登山爱好者或者曾经的登山爱好者多得令



人吃惊。里特伍德是其中的一个。维纳在《我是一个数学家》中回忆说，他1932年访问英国时，里特伍德正处于登山活动的巅峰。他常请维纳去他在三一学院的学生公寓，沿Z字形路线爬上纳维尔法院（Neville's Court）的石柱，向他解释攀岩的技巧。

两个爱尔兰人

哈米尔顿（William Rowan Hamilton，1805 ~ 1865）无疑是爱尔兰成长的最伟大数学家，谁是第二位的爱尔兰人却不那么容易确定。不过，史密斯（Henry John Stephen Smith，1826 ~ 1883）应该列为候选者之一。我们已经讲过7个哈米尔顿的故事（见《走进数学圈》和《重游数学圈》），但他的学问是那么渊博，所以在这儿我们再讲7个有关这位大数学家的故事。既然说到爱尔兰了，我们也讲几个史密斯的故事——他的事迹不像哈米尔顿那么多，但我们先前对他的忽略也该弥补了。

134° 诗与失望

哈米尔顿小时候就曾把荷马史诗翻译成无韵诗，而他凭着对韵律和节奏的天赋，也开始创作自己的作品。哈米尔顿的诗歌可以编成一大本，下面的一首题为《学院雄心》，颇能代表他的成绩。那是他在大学一年级写的，才18岁。

> 哦！雄心有勃发的时刻，
> 力量振奋着精神；
> 不在露营的原野，
> 不在华贵的王冠和宫廷，

不在忙碌生活的谋略，
是燃烧的少年无畏的斗争。
当狂热的精神激荡，
无论荣耀在何处闪光。
不要想那光耀多么短暂，
生活的赞美更应该向往。

环顾竞技场，你看那
苍白的面颊和暗淡的目光；
一群群的斗士，几个能
保持纯真和健康的色彩？
曾经活跃的精灵
已随彻夜的凝思偷偷溜走。
短短几个小时后一切都了结，
有人赢了一场又一场，
还有人从赛场落败，沉重而悲伤。

拿什么来奖赏征服者？
为了他的辛劳，他的痛苦，
还为那每一个午夜的悸动，
偷走了他燃烧的灵魂。
是大声的欢呼，
还是大众惊异的眼光？
是忌妒者的失望和羞愧，
还是浮名的虚声？
它们也许能博得一时的微笑，

却不能留下永久的快乐。
不要介意纯粹的欢喜，
自私的欢喜不可能
扬起悲伤的眉头。

然而，假如雄心有勃发的时刻，
让力量振奋着精神，
有些光亮的奖赏就是它自己，
给相信的人带来好运：
好奇的朋友赞许的眼神，
对手慷慨的同情，
还有无言的佳人
明眸里甜美的巧笑！
它们才是快乐，纯真而强烈，
铭刻在心，永生难忘；
忧愁随着时间流走，
它们的记忆更加长久。

最后一节说的那“无言的佳人”不仅仅是诗的抽象，而是真有一个女孩儿，是哈米尔顿通过她在三一学院的几个同学兄弟认识的。他对那女孩儿的感觉激发了他的诗情。不过，女孩儿喜欢别人，哈米尔顿陷入了失恋的痛苦。一天，他从学院走到天文台时，真想跳进那静静的皇家运河，一了百了。

[不同水平的数学家诗人，大概比一般人想象的多。举例来说，有多少同学知道，以圆规作图出名的马歇罗尼（Lorenzo Mascheroni）从来没进入数学家辞典，却是多才多艺的意大利诗

人。为那些数学家诗人，我们可以写一篇有趣的文章，并附上他们的作品。例如，我们可以想到法迪曼的一篇散文，或者一小本诗选。[11]]

11 参见 S92。

135° 哈米尔顿与华兹华斯

1827 年，哈米尔顿被任命为都柏林大学天文台台长，那年他还不到 22 岁。接受任命前，他决定游历英格兰和苏格兰。在旅行途中，他第一次走进了大诗人华兹华斯在昆布兰郡（Cumberland）瑞德尔（Rydal）山的家。二人在午夜漫步，往来于瑞德尔和安伯塞德（Ambleside）之间，依依不舍。他们都赢得了对方终生的尊敬和赞美。晚年的华兹华斯曾说过，哈米尔顿和柯尔律治（Coleridge）是他遇到的两个最神奇的人物。

1827 年 10 月，哈米尔顿走进邓星克天文台开始履行他的新职务。他的第一个著名来客就是华兹华斯，为了纪念大诗人的访问，他们在天文台花园的一次散步被命名为“华兹华斯漫步”。哈米尔顿本来很想当诗人，一定会逼着诗人朋友给他鼓励。不过，华兹华斯劝哈米尔顿把他惊人的力量集中在科学上。访问不久之后，华兹华斯给哈米尔顿写了下面一封信：

> 你寄给我的大量诗作，我看了很高兴，那也是我们都高兴的；但我们也担心写作会引诱你偏离科学的道路，而那似乎才是你应该走下去的，既为你的荣誉，也为他人的福祉。我必须一再重复，作诗是一门艺术，远不是大家想象的那么简单；诗的绝对成功还有赖于无数琐碎的事情，我恐怕你还得屈尊去了解它们……我还冒昧请你考虑一下，你天性里的诗歌部分是不是可以在散文里找到更适合的练习场所；这不

是因为它们更容易，而是因为那条路走起来更加自由自在，更容易得到回报。

事实是，尽管哈米尔顿有着诗的想象，却缺乏诗的技巧。当然，想象在诗歌和数学中都是至关重要的因子。我们想起外尔斯特拉斯的话："有一点是千真万确的，算不得诗人的数学家不可能是完美的数学家。"

136° 难得的礼遇

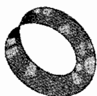
1845 年，哈米尔顿参加了不列颠协会的第二次剑桥会议，他被安排在三一学院的贵宾楼，据说牛顿曾在那儿写《原理》。哈米尔顿为这样的礼遇十分感动，回到爱尔兰后，他心血来潮，想写一本四元数的书，与牛顿《原理》相比也毫不逊色。

137° 哈米尔顿的第二次恋爱

哈米尔顿的学生中有年轻的安德尔勋爵（Lord Adare），是邓莱文（Dunraven）伯爵的大儿子。有一次，哈米尔顿访问安德尔时，被引介给了附近的克拉凯斯（Curragh Chase）的德维尔（De Vere）一家。德维尔迷人的女儿艾伦（Ellen）激起了哈米尔顿的热情，很快就为小姐写了情诗。他的追求得到了伯爵夫人的鼓励，而且也赢得了女孩儿父母的接受。当他正要提出结婚时，女孩儿随便的一句话却中断了这段姻缘。她说她"除了在克拉是不可能感觉幸福的"。

138° 错误的抉择和酒

哈米尔顿两次恋爱都失败了，接着又做了第三次不幸的选



择。那女孩儿是贝丽（Bayly）小姐，常到哈米尔顿的邓星克天文台附近来看她姐姐。她的身心都很虚弱，生活没有条理，而且是一个忧郁症患者。不过他们还是结婚了。哈米尔顿本来需要一个身心健全的贤内助，现在却不得不过毫无规律的生活，甚至经常没有饭吃，没有余钱，家里也被弄得一团糟。

生来就爱吃喝的哈米尔顿只好从酒精寻求安慰和刺激，他的放纵也逐渐从个人生活扩张到大庭广众的宴会大厅。他30多岁时，在都柏林的一次科学协会晚宴上，他完全失去了自制。清醒过来后，他为自己在公众面前的失态感到羞愧，从此决心戒酒。他坚持了两年，接着，在罗瑟爵士（Lord Rosse）举行的一次科学集会上，格林尼治天文学家艾黎（Airy）奚落他是绝对的禁酒主义者。从此他又破戒了，欣欣然地满足对酒的渴望。

哈米尔顿60岁去世的时候，书房的地板上堆着手稿，一堆堆之间留着狭窄的通道。这些手稿拿出去检验时，才发现稿纸中间夹着足够一大家人用的盘子和碟子，还留着腐烂食物的残渣。哈米尔顿常年饱受那些难以下咽的食物，有的一口没尝就剩下，结果书房成了肮脏的猪圈。

贝尔（E. T. Bell）在他的杰出传记里，给哈米尔顿的标题是“一个爱尔兰人的悲剧”。[12]

12 见贝尔著名数学家传记 *Men of Mathematics*（中译本《数学精英》，徐源译，商务印书馆，1991年）第19章。

139° 崇高的荣誉

经历几个月的病痛之后，刚进入61岁的哈米尔顿于1865年9月2日去世了。在最后的病痛日子里，他收到了来自美国的崇高荣誉。那时，美国国家科学院在内战期间成立了，哈米尔顿接到消息说，他被选为10名外籍院士之一，而且他的名字名列第一。于是，哈米尔顿爵士成为美国国家科学院第一个外国成员。

140° 哈米尔顿的心愿

“长期以来我一直欣赏托勒密对他的天文学老师喜帕恰斯的描述：一个爱劳动、爱真理的人。这就是我的墓志铭。”

141° 被改造了的爱尔兰布拉尼

史密斯巧舌如簧，机智过人，出尽了风头。麦克法兰曾讲过他的一些机智的故事。有人提到阿伯丁大学马里夏尔（Marischal）学院谜语般的格言：“他们说，他们说什么；让他们说。”史密斯回应说：“噢，那讲的是一个大学生的三个阶段。‘他们说’——他在头一年接受听到的任何事物，从中得到启发。‘他们说什么’——第二年开始怀疑并提出问题。‘让他们说’——表达的是他在第三年对什么都不屑一顾的态度。”史密斯曾接待一个朋友说：“你早晨喝茶吧；我喝茶后一整天都保持清醒。”他评论一个作家说：“他从没对过，也从不犯错误；他从来就没把话说到点子上。”对多年担任《自然》杂志编辑的天文学家洛吉尔（Lockyer），他说：“洛吉尔有时忘了他自己只不过是《自然》的一个编辑，而不是作者。”他向学院的新同事提忠告说，“写一点儿，留一点儿；我不写也不留。”1881年，在约克郡召开的不列颠协会50周年纪念会期间，赫胥黎教授漫步来到精美的敏斯特教堂，正遇着史密斯出来。史密斯假装露出很惊讶的表情。“你似乎很惊讶在此遇见我。”赫胥黎说。“是的，”史密斯回答，“我是惊讶你要进去；如果看见你站在塔尖上，我是不会惊讶的。”麦克法兰说，史密斯在社交方面“是被牛津的高贵改造过的爱尔兰布拉尼的化身”。[13]

13 布拉尼（Blarney）是爱尔兰南部科克附近一个小村庄，据说那儿有块石头能使人能言善辩。布拉尼也就有了能说会道者的意思。

142° 扔硬币

1849 年，史密斯在牛津获得了古典文学和数学的双重最高荣誉。据说他决定靠扔硬币来决定选择那个研究领域作为自己一生的事业。

史密斯宣扬数学的非功利主义观点。在红狮（Red Lions）的一个宴会上，他祝酒时说："纯数学，但愿它对任何人都不会有任何作用。"听说，在一次演讲中，他在新解了一个老问题之后说，"先生们，正是这种方法的独特的美，使它进入真正的科学头脑的美，在任何情况下都不可能有丝毫的实用性。"然而必须承认，史密斯是为了挑战当时在英国盛行的数学的实用主义观点才故意那么夸大其词的。其实，他在多个更重要场合都发表过重要言论，谈数学与物理学的密切统--。

143° 最后的演说

史密斯在政治、大学管理和宗教方面，是一贯的自由主义者。1882 到 1883 年期间，兴起了扩大郡区选民的选举权的政治运动，史密斯积极支持。尽管他得了重感冒，还是在牛津市政厅的集会上代表运动发表了激动人心的演说，为各阶级呼唤正义。他离开讲坛，在回家路上死于激动和伤寒的并发症。他死的日子是 1883 年 2 月 9 日，那年 47 岁。

两个苏格兰人

19 世纪的许多苏格兰数学家，带着智者的思想和工具，从爱丁堡大学走出来。他们中间有数学物理学家、哈米尔顿四元数

的热情鼓吹者泰特（Peter Guthrie Tait，1831～1901）和大代数学家克里斯托（George Chrystal，1851～1911）。《走进数学圈》333 顺便提到过克里斯托的名字；而泰特曾多次出现在《重游数学圈》（R119，277，346 和 349）。有些故事是巴利（J. M. Barrie）在他那本不太出名的可爱小书《爱丁堡的十一个学子》（*An Edinburgh Eleven*, *Pencil Portraits from College Life*）中保留下来的。尽管那是巴利早年的作品，我们还是可以从中发现很多他后来的著名小说和戏剧里特有的愉悦、幽默、情感和怪异。[14]

14 我们都知道小飞侠彼得·潘，那就是巴利（1860～1937）笔下的人物。

144° 雪耻

巴利讲了几个泰特的有趣故事，泰特是他在爱丁堡大学读书时的自然哲学教授。一个故事说，当泰特还是剑桥大学学生时，那儿的数学教授总被人嘲笑没有《圣经》知识。泰特和一个学数学的同学决心为他们雪耻。结果，在接下来的两年里，他们相继赢得了《圣经》知识竞赛的一等奖。

145° 自然哲学基础

汤姆逊和泰特合写了一本著名的教科书，后来被称为《*T* 和 *T*》（有时也称《*T* 和 *T'*》）。巴利说，他在爱丁堡大学时，《*T* 和 *T*》更普通的名字是《学生幽灵界入门》（*The Student's First Glimpse of Hades*）。但巴利认为泰特不仅是一流的解释者，也无疑是学校最好的演说者。

146° 泰特和史蒂文森

史蒂文森（Robert Louis Stevenson）关于弗莱明·詹金（Fleeming Jenkin）的传记回忆出版时，泰特做了详尽的批评，说科学家的

传记应该由懂科学的人来写。针对这一点,巴利指出,尽管科学家可能是惟一有话要说的人,但他们也是惟一有话说不出的人。

147° 离学生远点儿

泰特做示范实验时，如果学生围得太近，他会拿水管向他们喷水。

148° 保持讲台清洁

有个关于爱丁堡大学自然哲学教室的传说，不知道是否发生在泰特之前。泰特教授似乎很讨厌学生进教室时常把帽子放在他的讲台的角落上。于是，他警告他们，如果下次看到那儿有帽子，他就当着大家的面把它撕成碎片。警告还真起了作用。一天，他出去拿实验器械。在他离开的时候，一个学生溜进教授挂衣帽的壁橱，拿出帽子，放在桌子的角上，然后，恰好赶在教授回来之前，恐慌地回到自己在教室里的位置。教授看到帽子时，停了一下，然后说："先生们，我警告过你们如果我发现我的桌上有帽子会怎么做。"他从口袋里拿出预备好的小刀，把帽子割成几块，然后扔进水槽，同学们发出一阵欢呼。

这个故事令人想起 19 世纪初弗吉尼亚大学老数学教授"红发"埃柯（"Reddy" Echols)。他在教室总开着一扇窗户，方便自己随时向外吐痰。有一次，教授被人喊出去了一会儿，学生把窗户关了——教授回到教室后，那窗户可就惨了。[15]

15 埃柯（William Holding Echols, 1859 ~ 1934）教授是 20 世纪初弗吉尼亚大学最具个性、最令人尊敬和最多才多艺的人物，既是数学家也是工程学家。他去世以后，人们赞誉他为"大学精神的化身"。

149° 落伍

泰特非常保守，一贯反对大学改革。他曾说，如果学生在开始上课时知道的东西越少，那么他们需要忘记的东西也就越少

——今天，在讨论高中是否讲微积分时，还能从某些大学的微积分老师那儿听到同样的话。

150° 泰特的罗盘

缅因州立大学数学系的斯温弗德（Lee Swinford）教授喜欢说俏皮话，他听了几个泰特的故事以后，自己又讲了下面一个故事。斯温弗德教授说，泰特曾发明过几种不同的绝妙的罗盘，很受大家喜欢，被称作泰特罗盘。这些罗盘在水手、猎人、测图员、军队等各行业间广为使用。不过有一天，发生了一个奇异天文事件，还从来没人解释过——也许是太阳耀斑的超级爆发——全世界的泰特罗盘都失灵了。水手偏离了航线，猎人迷失了方向，测图员产生了严重误差，部队也走散了。这些事情引出一句大家熟悉的俗语："带着泰特的人都迷路了。"

151° 野兔和猎犬

巴利想起一个郁闷的同学，在克里斯托的一年级数学课上，坐他前面。他用铅笔刀在课桌上深深地刻着几个字："你们到这儿来的，所有希望都没了。"巴利说，"他过了一个学期，是自作自受，因为他从来没考及格。不过他也有坚持的东西，就是他能把握的东西。别的不过是粉笔画的蜘蛛网。"克里斯托的课显然只适合少数有天赋的学生，很快就把一般学生抛开了。巴利最后说，"对那些能追上他的猎犬来说，"那同学"真是一只好兔子"。同学们"脸一天比一天长，没完没了地做笔记。他们的笔记依样画葫芦似的把黑板上的东西描下来，晚上复习的时候，那些笔记看起来就像一张张从没见过的陌生人的照片。"克里斯托的课堂很安静，"什么声响都没有，只有铅笔刷刷写字的声音，

就像老鼠在偷吃谷子。那样的老鼠很多，可没有一个能消化的。”

152° 尴尬的答卷

巴利交出了克里斯托在爱丁堡大学第一堂数学课第一周的作业答卷。答卷发下来时，巴利在那儿“等着得表扬呢——如果真的那样，要谦虚一点儿；如果是羞辱，也要微笑着。”克里斯托教授说，有张答卷的名字他不认识，他把卷子在班上传阅，看谁能认识。卷子到巴利手上时，他认出那是他自己的，可分数实在太差了，他怕尴尬，于是装着满心欢喜又传了下去，最后卷子回到了教授手里，没人认领。

153° 寓言

巴利告诉我们，有一个老人，多年来每天读《泰晤士报》，从头读到尾。他得了两星期的感冒，耽误了读报。病刚好，他就开始读生病期间留下的报纸。他奋力想把那些报纸都读一遍，可是失败了。巴利说：“这是一个寓言，同学们希望克里斯托能那样做。”

154° 无人喝彩

克里斯托的课太难了，一般学生都跟不上，所以没多少人选他的课。传说，有一天在克里斯托教室的门上出现了一张字条：“今天没课，因为听课的那个同学病了。”

155° 点名

克里斯托发现学生老是坐在教室门口，于是他常在课上一半

的时候点名，不让学生溜课。

156° 可怜的算术家

“在绝妙的推理过程中，”巴利回忆说，“克里斯托常停下来，要把4，7和11加起来，可他就是不会做这种加法。于是他看着同学们，请求帮助——‘20，’‘24，’‘17，’他考虑的时候，同学们乱喊一气。通过这样的求助，同学们也兴奋起来了。”

157° 大理石

克里斯托教授在阶梯教室上课，有十排长条凳子。一天，当教授在黑板上写东西时，最后一排的一个学生拿出一块大理石。大理石在十级台阶上一路响着，向教授滚下去。教授头也不回，当大理石落到地板上时，他说，“第十排扔石头的那个同学，你能站起来吗?”原来，在黑板上写字时，他数了大理石滚过的台阶数。

最后一个通才



庞加莱（Henry Poincare，1854～1912）是数学界公认的最后一个通才——就是说，所有的数学在很大程度上都可以说是他的研究领域。现代数学以惊人的速度飞跃进步，几乎不可能再有谁能达到那样的高度。但在庞加莱开始他的数学生涯之前，人们也曾抱着同样的观点，那时大家认为高斯是数学领域的最后一个通才。

下面是庞加莱的几个故事，奇怪的是，他的名字竟然没有出现在前两圈里。

158° 手脚笨拙的人

庞加莱从小时候起，身体就不大灵活，不能和小朋友一块儿活动。他学写字时，才发现两只手都能用，而且写得一样糟糕。据说，如果不是因为手笨，做不好实验，他后来的科学工作也许会更实用。尽管手脚笨拙，他却喜欢步行和爬山（因为他对地质感兴趣），而且跳起舞来不知疲倦。

159° 艺术家

庞加莱画什么都不成，绘画课竟然只得了零分。学年结束时，同学们开玩笑地把他的艺术杰作拿出来展览。他们仔细地为每一幅图贴上希腊文的标签——如“这是一间屋子”，“这是一匹马”，等等。因为不会画，庞加莱的几何成绩没能得第一，不过还是保持了第二。

160° 名声帮忙

1871 年，庞加莱 17 岁，通过了科学和文学的学士学位考试。但他的数学差点儿不及格！他进考场晚了，很泄气，结果错了一道简单的几何级数求和公式的证明。幸运的是，他那时已经赢得了一点数学名声，主考官宣布，任何学生都可能被拒绝，但庞加莱例外。

161° 他是怎么做的呢？

庞加莱在课堂上从不做笔记，同学们以为他不务正业，只知道玩弄名词，其实并没真正掌握内容。为了考验他，一个高年级同学给他出了一道很难的数学问题。庞加莱不假思索，立刻就解

决了。后来，他在毫无准备的情况下赢得了森林学校入学考试的数学一等奖，更是令大家惊讶不已。有个著名的故事说，庞加莱后来进入巴黎理工学校时，主考人先听说过他是数学天才，就把考试延长了差不多一个小时，给他出了几道特别困难的问题。庞加莱毫不费力就解决了每一道题，得了最高分，以第一名的成绩入学。他在一生中总能不假思索地解决数学难题，这常令同事们感到好奇，"他是怎么做的呢?"

162° 误会

亨利·庞加莱的爷爷有两个儿子，利昂（Leon）和安托尼（Antoine）。利昂成了一流的医生和医学教授，安托尼是路桥总监。利昂的儿子亨利成了那个时代最伟大的数学家，安托尼的一个儿子雷蒙德（Raymond）进了法学界，第一次世界大战期间成为法兰西共和国总统；另一个儿子是中等教育的领导者。

有故事说，战争时期，有人问罗素他认为谁是法国当代最伟大的人物。罗素毫不迟疑地回答，"庞加莱。""什么！那个人啊?"提问者惊讶地喊道，因为他误会为共和国总统雷蒙德·庞加莱了。

163° 堂兄弟

亨利和做总统的堂兄雷蒙德之间没什么感情。有一次，庞加莱被介绍给大家，有人问他，"您是雷蒙德总统的堂兄弟吗?""完全不是，"亨利回答，"他是我的堂兄弟。"［见《走进数学圈》344，雅可比兄弟也有类似的故事。］（Maxey Brooke）



164° 文字的成功

庞加莱不仅是数学和自然科学的杰出创造者，也是那些学科最得力的普及者。他写的解说性读物都是廉价的纸皮书，吸引了不同行业的人士争相购买和阅读。那些书说理透彻而风格清新，是无与伦比的杰作，已被译成多种外国文字。[16]因为在科学普及方面的杰出文学成就，庞加莱获得了法国作家的最高荣誉——当选为法兰西学院文学院士，那是法国诗人和小说家们梦寐以求的荣誉。

16 庞加莱关于科学思想和方法的几本小书，如《科学与假说》、《科学的价值》、《科学与方法》等，都有中译本。

165° 拙劣的管理者

许多杰出数学家也同样表现为精明的管理者，而且，在大学里，通常是顶尖数学家最终成为系主任或学院院长。庞加莱似乎完全没有这方面的才能，而他那成为法兰西共和国总统的堂兄雷蒙德，却是当然的行家。

166° 超强的记忆力

庞加莱读书速度惊人，不论读什么都过目不忘。他的记忆力甚至超过了神奇的欧拉（见《走进数学圈》242）。他的空间记忆特别好，总能记住哪本书的哪页哪行说过什么特别的话。由于视力不好，他培养了另一项特殊本领，主要靠耳朵也能和别的数学家一样学会数学定理和段落。这个本领是他在学校锻炼出来的，他在教室看不清黑板，就只好坐着听讲，他不做任何笔记，也能跟上并记住老师讲的任何东西。

167° 庞加莱的数学方式

庞加莱喜欢一边不停地踱步，一边在头脑里做数学。等问题彻底考虑清楚了，他才一口气写出来，几乎没有涂改。他工作时，周围的噪声也充耳不闻。凯莱（也许还有欧拉）也是这样做数学的 庞加莱的某些论文还保留着这种“急就章”的痕迹。这令人想起高斯，他的作风正好相反，文章是精心雕琢出来的。他的格言是：“少，但熟了。”

168° 傻子

庞加莱在数学和科学创造与普及的影响都达到巅峰时，参加了一组比奈（Binet）智力测试。[17]他的表现大失水平，被判为傻子。

17 法国心理学家比奈（Alfred Binet，1859～1911）发明了智商测试方法。

多数智力测试似乎都不能恰当地评判一个天才，因为天才通常比测试的发起者或组织者看问题更深远。例如，比奈测试（在问题的缺陷被指出之前）常见这样一个问题：“现在是8点20分，当时钟的两个指针互换位置，即时针指着现在分针的位置，而分针指着现在时针的位置时，应该是什么时刻？”标准答案是“差20分4点”，但正确答案是“没有那样的时刻”。因为如果指针交换了位置，时针应该正好在4点的刻度。但如果时针指向4点正，那分针就该指向12，不可能接近8。

169° 两种心不在焉

庞加莱有两种心不在焉的表现。一种是真的，例如不小心（真的）把宾馆的床单收拾进自己的旅行包里。另一种是为了方便，例如让某个他不喜欢的大人物隔着书房的窗帘等3个小时，

其实那人也知道庞加莱已经听说他来了。来访者耐心地等待，一点儿声息也没有。最后，为了得到更好的结果，庞加莱把头伸出窗帘，大声吼道，“你大大地打扰我了，”然后又退回到窗帘背后。这时候，来访者才起身离开，让那位“心不在焉的”教授继续工作。

庞加莱常忘记吃饭，几乎从不记得自己是否用过早餐了。因为他不太讲究吃饭，而吃饭经常干扰更重要的事情，所以很难说在这方面他属于哪种心不在焉。

170° 动物爱好者

庞加莱和哈米尔顿一样（见《走进数学圈》337），是真正的动物爱好者。他第一次试用来复枪时，不小心打死了一只小鸟。他对这次倒霉的事件一直耿耿于怀，从此不再拿枪了（除了在讨厌的军训时）。

171° 英雄壮举

因为对地质学感兴趣，庞加莱曾想当一名矿业工程师，于是，他从理工学校毕业后就进了矿业学校。做学徒时，他所在的矿井发生爆炸，夺走了16个人的生命。爆炸不久，他就作为营救人员下了矿井。

172° 西尔维斯特会见庞加莱

《走进数学圈》143讲过布里格斯和纳皮尔的第一次会见，是占星家里利（William Lilly）在《他的生活和时代的历史》中为我们记录下来的。我们还该记得，两个数学家在见面时相互仰慕地凝视着，几乎一刻钟说不出话来。西尔维斯特在描述他第一

次见著名的庞加莱时，也提到了那次历史性的会见。

“我最近去盖－吕萨克街（Rue Gay-Lussac）拜访庞加莱时，完全走进了布里格斯第一次访问纳皮尔时的感觉……在这样一个深藏着无限智能的宝库面前，我的舌头似乎失去了功能，盯着他看了好一会儿（大概两三分钟），直到看清那张年轻的脸，我才找回说话的感觉。”

173° 未完成交响曲

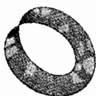
1911 年，庞加莱预感到自己的日子不多了。12 月 9 日，他写信给一家数学杂志的编辑，问他能否反常规地接受一篇未完成的关于一个重要问题的文章。他向编辑解释说，在他的年龄，大概无法完全解决那个问题，但他觉得他的部分结果也许能将研究者引向正确的道路。文章被接受并发表了，而且不久之后，问题就被 27 岁的美国数学家伯克霍夫（George David Birkhoff，1884～1944）完全解决了。1912 年 7 月 17 日，庞加莱与世长辞。

法国汤里的烤面包片

这个象限的最后，我们讲几个专业和业余的法国数学家的故事。拿破仑（Napoleon Bonaparte，1769～1821）的几个故事见《走进数学圈》，约当（Camille Jordan，1838～1922）和布尔巴基群体的故事见《重游数学圈》。

174° 洞见

在埃及战役中，拿破仑偶尔会坐下来和远征的学者们聊天。有一次，他有点儿忘形地坦白自己错过了一生真正的职业。他过



去想当一个科学家，甚至超越牛顿。“可是，我的将军，”蒙日说，“那是不可能的。牛顿已经发现了宇宙的原理。”“不，”拿破仑说，“牛顿只发现了在大尺度上主宰世界的东西。在小尺度主宰世界的法则——关于原子的定律，还有待发现呢。”

175° 精确

拿破仑一定有某种表达自己的精确的数学方式。我最喜欢的例子是《拿破仑法典》的一个条款，它说，“L'enfant concu pendant le marriage a pour pere le mari.”（斯特洛伊克）[18]

18 见《拿破仑法典》第一编第七章第一节第 312 条，大意是：“如果夫妻在婚姻存续期间有了孩子，那么丈夫就是其父亲。”

176° 约当的符号

约当在他的数学作品中用了很多复杂的符号，据说，他常把 4 个代表同样意思的量（如 a，b，c，d 或 α，β，γ，δ）写成 a，M'_3，ε_2，$\Pi_{1,2}''$。

177° 阿达玛青年时代的故事

阿达玛（Jacques Hadamard，1865 ~ 1963）因为和法国著名的德雷菲斯（Colonel Dreyfus）事件的主角德雷菲斯上校的夫人有亲戚关系，也算是德雷菲斯派。另一方面，大数学家埃尔米特（Charles Hermite）很保守，强烈反对德雷菲斯一派。有一次，埃尔米特因为博士头衔要考年轻的阿达玛。因为政见不同，考试临近时，阿达玛感到非常紧张。等到埃尔米特正式发话时，他就更紧张了：“阿达玛先生，你是个叛徒！”阿达玛正疑惑地私下咕哝时，埃尔米特继续说，“你为分析背叛了几何。”

178° 阿达玛晚年的故事

1963 年 10 月，阿达玛以 98 岁高龄离开人世，《法国数学会

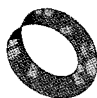


会刊》发布了消息。消息配以一幅精美的阿达玛肖像，正是朋友们那么多年以来熟悉的样子。那松软的胡须，鹰勾的鼻梁，稀疏的短发，瘦削、友好而敏感的面容，令人想起维纳讲过的一个故事。1935 年，维纳教授在中国讲学，他古稀之年的朋友阿达玛在第二学期开始时也来长住了一段时间。一天，维纳在北京的古玩店淘宝，发现一张中国先人的肖像，太像阿达玛了——任何熟悉阿达玛面容的人，都能一眼看出他们的相似来。维纳把画买下，送给阿达玛。尽管阿达玛非常喜欢，画还是丢了，或者放错了地方。维纳以后去看阿达玛时，再也找不到那张画了。维纳感觉阿达玛太太并不欣赏丈夫像画上的那个昏昏然的满清官吏的样子，所以她把画偷偷藏起来了。

179° 布尔巴基的办公室

美国伊利诺伊大学“城市原野”（champaign-urbana）校园最古老的建筑之一是阿杰尔德（Altgeld）大楼。它原先是图书馆，后来成了法学院和数学系。多年过去了，大楼已经焕然一新，还增加了楼层。不过也并不都那样。楼层之间有间小屋，没有窗户，只有通过电梯的紧急出口才能进去。

美国数学会的一个区域性会议要在校园召开，开幕前不久，学校领导在数学家到来前巡视大楼。他发现那间满是蛛网和灰尘



的小房间装了破旧的书桌和摇晃的椅子，一只装着滴泪的蜡烛的空酒瓶，一个古旧的墨水池，还有一支长长的羽毛笔。门口贴着一张小标签：N. Bourbaki。(John W. Toole)

180° 数学家像法国人

歌德在《格言与感想》(*Maximen und Relexionen*) 中说："数学家像法国人：不论你对他们说什么，他们都翻译成自己的语言，立刻就成了完全不同的东西。"

第三象限

从失落的手稿到希尔伯特之死

两个挪威人和一个俄罗斯人

阿贝尔（Niels Abel，1802～1829）27岁就死了，被认为是挪威最伟大的数学家；我们就以他的三个故事来开启这个新的象限。以变换群闻名的S·李（Marius Sophus Lie，1842～1899）是另一位杰出的挪威数学家，我们讲一个他的故事。然后，我们用第一个非欧几何的创立者、俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（Nicoli Ivanovich Lobachevsky，1793～1856）的三个故事来结束这个单元。

181° 失落的手稿

如果你投出去发表的稿子丢了或被放错了地方，恐怕没有多少事情能比这更令人生气的了。阿贝尔曾把他的一篇杰作“论一大类超越函数的一般性质”给了柯西，请他转交法国科学院评判和发表。柯西自己的研究很忙，把稿子给了哈切特（Hachette）。1826年10月10日，哈切特向科学院做了报告。结果是指定勒让得和柯西来审稿——勒让得74岁，柯西39岁。几年过去了，阿贝尔一点儿论文消息也没听到。最后他写信给雅可比，说了论文的事情。1829年3月14日，雅可比写信给勒让得，打听那篇重要文章的下落。勒让得回答说手稿很难读，墨水几乎看不见，字迹也很潦草，他们认为作者应该重新交一份可读的稿件。柯西把文章带回家，大概给阿贝尔说了要重写，就随便放在一边，不久也就忘了。很快，挪威国内都知道了作者的论文被忽略的事情，挪威住巴黎领事敦促科 院采取行动，索要有关手稿丢失的情况报告，还惹出了一点儿外交麻烦。在这种情况下，柯西设法找出了论文。1830年，法国科学院为了弥补过失，授予

阿贝尔（和雅可比一起）数学大奖（Grand Prize）。但阿贝尔那时已经死了。

直到1841年，阿贝尔的划时代论文才最终得以发表。即使这个时候，也出现了不可原谅的过错。不知什么原因，在出校样之前，编辑和印刷工竟把手稿弄丢了！

182° 向大师学习

有人问阿贝尔，他如此迅速就走进了他那学科的一流行列，成功的秘诀是什么？他回答："向大师而不是他们的学生学习。"

183° 发愤

应该记得，牛顿（见《走进数学圈》92）在学校曾被跋扈的同学踢了一脚，那是他受到的第一次刺激。等打赢了那个家伙后，牛顿决心在学习上也要战胜他。

阿贝尔在学校时也是受了刺激才发愤学习的。事情不是他的，而是他的一个同学。那同学被虐待狂的老师残忍地打死了。校董事会被迫开除了那个兽性的老师，让霍尔伯（Bernt Michael Holmboe，1789～1850）来接替他的位置。霍尔伯不但是好老师，也是出色的数学家。他很快从年轻的阿贝尔身上发现了数学天才，启迪小伙子努力学习，走向成功。霍尔伯成了阿贝尔一生忠实的朋友，竭尽全力在经济和学业上帮助他。也是霍尔伯在1839年编辑了第一版阿贝尔的文集。

184° 不幸的事件

挪威数学家S·李和普鲁士数学家克莱因（Felix Klein）于1869～1870年冬天第一次在柏林相会，两个数学家在那儿联合

发表了几篇论文。1870 年夏，李和克莱因一同在巴黎，和两个法国数学家约当（Camille Jordan）和达布（Jean Gaston Darboux）往来密切。这几个不同国度的数学家的聚会，结出了丰硕的成果，但普法战争的爆发把他们分开了。克莱因很快离开巴黎去德国，李打算离开法国去意大利。李看起来很可疑，被当成间谍抓起来了，在监狱关了一个月，才被达布营救出来。

185° 几乎惟一的事件

俄罗斯政府决定整修喀山大学校园的古老建筑，并建一些新楼，罗巴切夫斯基负责工程质量和经费使用。为了更好地完成任务，他学习了建筑，熟练地掌握了这门学问，结果新建和改建的楼都非常漂亮而实用，而且建设费用比预算的还少。

186° 最可宝贵的品质

罗巴切夫斯基很爱他的大学，为它感到自豪，就在他成为尊贵的学院院长之后，即使是最琐碎的杂务，只要能使学校更好，他也会毫不犹豫地脱下衣帽甩开膀子去做。传说，有个著名的外宾来访，正遇上衣冠不整的院长在擦地板，就把他错当成看门人，请他领着参观学校的图书馆和博物馆。来客为看门人的礼貌和学识大为欣赏，参观结束后，要给他一笔小费。令他惊讶的是，看门人拒绝，来客把这行为看做一个高傲的看门人的怪癖。当天晚上在领导席上，两人经过引介相互认识了，于是都向对方表示歉意。

如果大学所有的管理者、所有的老师和学生都能那样为他们的学校感到自豪，那该有多好啊！教学大楼将更加整洁明亮，没有纸屑和烟头，校园里没有啤酒瓶和易拉罐，没有糖纸，没有打

破的灯管，没有被破坏的灌木丛。

在缅因州立大学戈尔翰校区的两年里，作者住在已退休的贝莱（Francis L. Bailey）校长隔壁，他是一个了不起的好人，尽管从学校的领导岗位退下来，但每当在校园和小城散步时，他总忘不了捡起地上的烟头。秋天，他会穿上旧衣服，帮着清洁工打扫落叶。

187° 恰当的比喻

克里弗德（William Kingdon Clifford）很会遣词造句，也正是他第一个称罗巴切夫斯基（第一个非欧几何的创立者）为“几何学的哥白尼”。

数学家的王子

高斯（Carl Friedrich Gauss，1777～1853）当然是19世纪最伟大的数学家，也是有史以来最伟大的数学家之一。他给哥廷根大学带来了数学的气息，使它在很多年里一直是数学的圣地和学子的梦乡。那里孕育了一个真正伟大的现代数学学派。关于这样一个影响深远的创始人和天才，流传着无数的故事和传说。在前两圈我们已经讲过十几个高斯的故事，下面再讲二十几个。

188° 一盏萝卜小灯

在寒冷的冬夜，父亲早早地就让高斯和哥哥乔治（Georg）上床睡觉，为的是节省蜡烛和炭火。卡尔总会拿一根萝卜到阁楼小屋。他把萝卜里面掏空，搓一根粗棉花线，用一点儿肥肉做燃料，就做成一盏暗淡的小灯。他靠它学习到深夜，直到寒冷和疲

惫驱他上床。

189° 失意

一天，布伦瑞克公爵夫人在公馆花园里遇到了正沉浸在书中的小高斯，她惊讶地发现小孩儿竟然完全明白他读的东西。公爵听说了以后，派人给高斯的家里传话，请他们把孩子带进公馆来。信差到高斯家时，误会是请卡尔的哥哥乔治，小乔治哭个不停，就是不去。这时才发现邀请的不是乔治，而是卡尔。小高斯访问以后，惊奇而好心的公爵为他提供了读书的费用。当卡尔世界闻名而乔治还默默无闻时，失意的哥哥说过这样的话："啊，如果我早知道，我现在也成了教授；邀请先是给我的，可我不想去那个城堡。"

190° 一夜留客

高斯有个叫里本特洛普（Georg Julius Ribbentrop，1798 ~ 1874）的朋友，是哥廷根大学法学教授。里本特洛普是坚决的单身汉，校园里的怪人，一个经常心不在焉的教授。他和高斯之间有着好多可乐的故事。有一次，里本特洛普应邀去高斯的哥廷根天文台吃晚饭。晚饭后，狂风暴雨大作。因为天文台离里本特洛普在城里的家很远，高斯就请他在家过夜。里本特洛普接受了邀请，但趁人不注意的时候溜走了。过了些时候，天文台的门铃响了，令主人大吃一惊的是，门外雨中立着的竟是里本特洛普，全身都湿透了。原来，他为了这一夜的邀请，急着赶回家取来了洗漱用具。

191° 天文台的客人

1836年11月24日夜将发生月全食，高斯答应让朋友里本特洛普用天文台的望远镜观看那壮观的场景。那天晚上，老天下起了瓢泼大雨，不可能看月食了。高斯以为朋友不会来，所以，当他突然看见里本特洛普浑身湿透站在门口时，该是多么惊讶！

“我亲爱的同事，”高斯说，“我们计划的月食观察在雨天是不可能的。”

“不要紧的，”里本特洛普举着一把大伞，回答说，“这次我的女房东关照过我别忘记带伞。”

192° 高斯的助手

光学家泰佩尔（J. H. Teipel）在哥廷根天文台做过高斯的助手。他的任务是领着来访者参观天文台，通过望远镜看天空，并向他们通俗解说天体。一天晚上，他让一群游人看几颗行星时，一个太太问地球到金星的距离有多远。“我不能告诉您，夫人，”泰佩尔解释说，“高斯先生关心天上的数字，我劝您还是欣赏天空的美妙吧。”

193° 聚精会神的高斯

卡朋特（Carpenter）在《精神心理学》中讲了一个高斯聚精会神的故事，可能是杜撰的，因为从没听人说过高斯属于那种心不在焉的教授。那故事说，仆人告诉高斯他深爱的夫人病情越来越严重了，而高斯正埋头思考一道难题。他好像听到了，但仍在继续工作。过了一会儿，仆人又来了，说女主人的病更加恶化，请求教授马上过去。“我这就去，”高斯回答，但还是沉浸

在他的思想里。一会儿，仆人第三次来了，说夫人快不行了，如果教授不赶紧回去，可能再也见不着了。高斯抬起头来，静静地回答："让她等着我。"

194° 快乐源泉

高斯有6个孩子，4个儿子，两个女儿。第四个孩子皮特（Peter Samuel Marius Eugenius Gauss）——常被叫欧根——活了85岁，是孩子中最长寿的。他也是孩子中最有才的，在数学和语言两方面都表现了很高的天赋。还是小孩儿时，欧根有一次告诉父亲他好高兴解决了一道语法题。父亲眼睛一亮，回答说："好的，孩子，从解决那样的问题得到的快乐是很大的，可它比不上解决数学问题带来的快乐。"

195° 维护名声

高斯看出儿子们的才能后，不想他们搞数学专业，因为他相信他们没人能超过他，他不希望贬低高斯在数学领域的名字。

196° 父与子

欧根和他伟大的父亲一样，对语言有着强烈的爱好，在孩提时就几乎完全掌握了法语。后来到美国，他法语之流利常被人当法国人。他受雇于位于密西西比和密苏里河源头的美国皮毛公司，轻松学会了讲苏语，帮助一个叫庞德（Pond）的传教士编制苏语字母，把《圣经》译成苏语。去世前一年（1895年），他谈起他一生的愿望是想学哲学，假如留在欧洲，他大概已经成哲学教授了。

欧根也和父亲一样，喜欢在头脑中进行长长的算术运算。举

个例子，他 80 多岁双目失明后，还心算在百分之四年利率下 1 美元在 6000 年后会增加到多少。假如把那笔钱做成纯金的立方体，那么，光需要 10^{15} 年才能经过它的一边。

197° 祖孙

高斯有很多孙儿，但只见过一个，其他的都生活在美国。一天，那个德国小孙儿在高斯住的哥廷根天文台的花园里玩儿。祖父看见他问："长大了你想做什么样的人?"小孩回答："那爷爷您想做什么样的人呢?"老人拍着孩子的肩头，笑着说："我的孩子，我已经是个人物了。"

198° 高斯和英国海军部

下面的故事是德摩根在《悖论集》里讲的。

伦敦股票经纪人贝里（Francis Baily，1774～1844）对科学特别是天文学很感兴趣，他在 1835 年写了《第一个皇家天文学家弗拉姆斯蒂德的故事》。书由英国海军部出版发行，他们委托贝里草拟一个清单。书还没出来，就有宣传说它有多少非凡的发现，引得好多名人都向海军部要书。书的数量不够，海军部的大员们可为难了。他们看了贝里的名单，发现有些人没名气，不该送书。他们把贝里找来，想当面问清楚。海军部秘书询问了哪些名字不够资格，然后说："喏，我们来看看名单吧，我看，哦，对了，在这儿呢，这个——高斯，谁是高斯?"贝里只好告诉秘书，那个高斯是世界上还健在的最伟大的数学家。

199° 柏林科学院

1805 年，普鲁士威廉三世（Frederick William III）邀请洪堡

(Alexander von Humboldt) 加入柏林科学院，希望他的加盟能为科学院增光。[1] 洪堡回答说他的加入无关紧要，真正能给科学院带来光彩的惟一人选是高斯。1810 年 4 月 18 日，高斯当选为柏林科学院院士。

1 从整个科学史来说，洪堡(Baron Friedrich Heinrich Alexander von Humboldt, 1769 ~ 1858)的名声和地位一点儿也不逊于高斯。他是德国语言学家、自然科学家、自然地理学家、著述家、政治家、近代气候学、植物地理学、地球物理学的创始人之一。1860 年，德国成立了以他的名字命名的"洪堡基金会"，"基金会的目的在于向学术上优秀的外国科学家，不分性别、种族、宗教信仰或世界观，提供研究奖学金和科研奖金，使其有可能在联邦德国从事课题研究并建立由此产生的学术联系。"自 1933 年以来，中国已有 1000 多个学者获得洪堡基金的资助。

200° 词序问题

哥廷根校友、剑桥公爵阿道夫（Adolf Friedrich）对洪堡说："哥廷根常被人说三道四，可自从有了图书馆和高斯，我们可以不理它了。"洪堡回答："我同意，但我有责任要求阁下颠倒两个词的次序，首先应该提到我们时代最重要的数学家、伟大的天文学家和杰出的物理学家的名字。"

201° 理论与实践

吕布森（H. B. Lubsen, 1801 ~ 1864）是汉堡的私人数学老师，写过很成功的初等代数和算术的自学教科书。他还写过一本高等几何教材，把它敬献给了笛卡儿的精神，并在第一版前言里写道，"我可敬的老师高斯说过，理论吸引实践，犹如磁石吸引铁钉。"

202° 亵渎

高斯在提交了那篇包含代数学基本定理的第一个严格证明的著名学位论文后，终于在 1799 年 7 月 16 日获得了赫尔姆斯泰特（Helmstedt）大学博士学位。这篇论文和其他一些数学发现融入了他的伟大著作《算术研究》，于 1801 年 9 月 29 日出版。

1849 年 7 月 16 日，正好获博士学位 50 年的时候，高斯参加了哥廷根为他举行的庆典。作为庆典的"表演"之一，高斯要

在活动的某个时刻用《算术研究》的一页来点燃他的烟斗。当时也在庆典上的狄利克雷惊骇不已，认为那是一种亵渎。他大胆地从高斯手里夺过书页，把它当做纪念一直珍藏在身边。他去世后，编辑从他的论文里找到了那一页。

203° 寻猎

高斯在1808年9月2日给朋友博莱（Wolfgang Bolyai）的一封信中写道：

> 给我们带来最大享乐的不是知识，而是学习的行动；不是占有，而是去获得它的行动。当我彻底明白一个问题以后，我会离开它，重新走进黑暗；从不满足的人是很奇异的——他完成一个建筑，不是为了安逸地住下来，而是为了开始建造新的。我想世界的征服者们一定也有这样的感觉，他在彻底征服了一个王国之后，会把手伸向另一个王国。

204° 高斯和学生

一天，高斯遇到一个学生摇摇晃晃地走在哥廷根的街上。两人靠近时，他想努力直起身子，可没成功。高斯责备地看着他，拿手指指着他，微笑着说："年轻的朋友，我希望科学能和我们哥廷根的好啤酒一样令你陶醉。"

205° 数学教育的艰巨

高斯在1810年1月7日给他的天文学家朋友贝塞尔（Friedrich Wilhelm Bessel）的信中写道：

今年冬天我给三个人讲了两门课，他们一个懂一点儿，一个几乎不懂，还有一个不懂也没能力。这些都是数学职业的艰巨。

206° 凯莱谈高斯

凯莱非常钦佩高斯：

高斯所有的作品都是一流的，一件有意义的事情是展现他的不同论文对产生现代相关主题的影响，不过这需要写一部1800年以来的数学史。

207° 曲面的绝对和相对性质

可以用两种方式考察一个曲面：作为固体的边界或者作为从空间分离的二维薄膜。前者是建筑工程师所认为的曲面，后者是土地测量员眼中的曲面。第一种观点引导人们去发现将曲面与周围空间相联系的性质，第二种观点引导人们去寻求曲面独立于空间的性质。第一种性质是曲面的相对性质，其研究被称为曲面的外在几何；第二种性质叫曲面的绝对性质，其研究被称为曲面的内禀几何。有趣的是，曲面微分几何的两个伟大先驱，蒙日和高斯，就分别把曲面根本地看作固体的边界和分离的二维薄膜。蒙日的成就之一就在于做军事要塞的工程师，而高斯做过著名的测地线和大地测量工作。

208° 回光仪

回光仪是高斯最得意的发明，他宣称他这项发明是沉思的结果（与他对大地测量的兴趣有关），而不是因为偶然。有一次，

他在圣米切尔(St. Michael)教堂的尖塔看见阳光从汉堡尖塔的玻璃窗反射出来，但他坚持认为这是后来的事情，只是令他更加坚信了那种仪器的实用性。高斯津津乐道的是，他第一次试验回光仪，聚集了好多观众，当反射光出现在远处时，大家一片欢呼。

209° 霍恩哈根塔

1818 年，高斯受命进行汉诺威王国的大地测量，这项任务耗费了他几年的时间，导致了他的回光仪的发明，也造就了他在曲面微分几何的辉煌成果。实际的三角测量是在 1821 和 1823 年间完成的。

对高斯最好的纪念，是坐落在霍恩哈根峰（Hohenhagen）上的高斯塔。它代表布罗肯（Brocken）－霍恩哈根－因塞尔斯堡（Inselsberg）三角形的一个顶点，在汉诺威测量中起着至关重要的作用。它由玄武岩筑成，红色瓷砖的塔顶。塔高出地面 120 英尺，游人在上面能看到一幅壮观的乡村景象。塔内有间屋子，放着一些纪念物，一些天文学和大地测量仪器，还有一座由艾伯莱因（Gustav Eberlein）雕刻的巨大的高斯胸像。

210° 高斯－韦伯纪念碑

1831 年，高斯开始与同事韦伯（Wilhelm Weber）合作进行电磁学的基础研究，1835 年，这两个科学家设计了他们的电报机。1899 年，哈泽尔（Ferdinand Hartzer）将这一发现表现为一个精巧的纪念碑，树立在哥廷根大学的校园里。碑立在圆柱形的底座上，高斯坐着，韦伯站在一旁，两人显然在讨论他们的电报机。纪念碑在精心安排的庆典中揭幕。碑的惟一错误是把两人的年龄表现得太接近了。实际上，高斯比韦伯大 27 岁。

211° 战争创伤

第二次世界大战期间，为保护哥廷根大学图书馆（德国馆藏最丰富的图书馆之一）免遭可能的破坏，珍本图书被转移到了安全的地方。哥廷根在战火中安然无恙，而一颗飞来的炸弹却炸坏了迁移的图书馆。

高斯在布伦瑞克出生的那座房子，后来成为博物馆，在1944年10月5日的空袭中被毁了。幸运的是，博物馆里的东西早已搬迁，现藏于市立图书馆。

三个伟大的哥廷根教授

以高斯领衔的在哥廷根大学学习或教书的数学家名单，就像是一册数学的荣誉簿。接下来的84个故事和传说，讲的就是名单上的那些人。如果加上前面的二十几个高斯的故事，我们（在这一圈里）就有了100多个关于哥廷根数学家的故事。现在我们从三个大家说起：黎曼（George Berhard Riemann，1826～1866）、闵可夫斯基（Hermann Minkowski，1864～1909）和兰道（Edmund Landau，1877～1938）。

212° 有趣的类比

有时候，我们很难找出两个不同领域的人，在各自的领域有着相似的地位。这种类比是很有趣的，尽管一般说来意义有限。人们在数学家黎曼和诗人柯尔律治之间发现了这种相似。[2] 他们在各自领域都没发表多少东西，但发表的东西都注定是光彩夺目的；而且两人都对别人产生过巨大的影响。当然，两人也有许多

2 Samuel Taylor Coleridge（1772～1834）是英国浪漫派诗人，与华兹华斯合作过一本《抒情歌谣集》，其《古舟子咏》（The Rime of the Ancient Mariner）是浪漫诗歌中神奇幻想的瑰宝。

不同的地方。

213° 礼物

黎曼小时候最喜欢做的一件事情就是做（或者买）一些小小的纪念礼物送给父母和兄弟姐妹。有一次，他送给父母一个新奇的万年历，那是他自己发明的，令同学们大吃一惊。

214° 神速

黎曼学高等数学轻松而神速。他用6天时间就读完并掌握了勒让得《数论》（*Theorie des Nombres*）的859页严密论证。

215° 反差

很多生性腼腆的人在自己的创造性思想中却很大胆。黎曼就是这样的人——他在生活中缺乏自信，不知所措，但在科学中气魄宏大，勇往直前。

216° 黎曼演说

黎曼最有趣的故事是关于他的试用演说——就是成为哥廷根大学的正式无薪讲师之前必须发表的尝试性的演说。按照惯例，他应该提交三个不同的演说题目，由教授委员会选定其中的一个。从一般的情况看，教授们通常选择第一个或第二个题目，黎曼也就专心准备那两个演说，而几乎没时间准备第三个他随便提出的题目。

第三个演说的题目涉及几何基础的假设，那是高斯思考了60多年的问题。高斯非常想听听这个杰出的年轻人会讲些什么，就决定让黎曼讲第三个题目。于是，经过最后一刻的疯狂“恶

补”，黎曼向哥廷根的全体教授、也向全世界发表了他的演说，那不但是一篇数学的杰作，也是一篇演说的典范，也许还是数学史上同样篇幅的单篇作品中内容最为丰富的。为了不让在座的非专家们厌烦，黎曼的文章省略了数学细节，提出了大量新颖而卓有成果的思想——它们在未来的很多年里一直吸引着研究者们的注意。

在演说的最后，黎曼抱歉提交了这样一个显然无用的题目，不过他说，这种考察的价值也许在于，当物理学定律的探索需要某个欧几里得以外的几何时，它能把我们从先入为主的思想中解放出来。这个神奇的预言在他去世大约 50 年后通过爱因斯坦的广义相对论变成了现实。

217° 天才与工匠

兰佐斯（Cornelius Lanczos）在他精彩的《历史上的空间思想》一书中谈到高斯和黎曼的卓越几何成就时说：“天才凭一个想象就像闪电那样照亮原野，然后工匠走进来，圈出一块可以居住的地域。”[3]

3 蒙纽约科学出版社惠允引用。（原注）

218° 知识的分量

黎曼有着惊人的数学天赋，尽管写的东西不太多，但它们都洋溢着新奇的思想和多产的概念，指引着别人去开展大量重要的研究。兰佐斯说得好：“尽管黎曼的文章只有 538 页的一卷，但如果用理性来衡量，这一卷重如千钧。他众多发现的每一个都将注定改变数学科学的进程。”

219° 神童

闵可夫斯基是数学家里最讨人喜欢的一个。他对同事和学生都一样友好，而且对任何人都不抱中庸的态度。他也有着惊人的创造力——还是一个神童。他姐姐凡妮（Fanny）告诉我们，在小学时他的数学才能就非常出众，每当老师在黑板前被问题卡住了，同学们就齐声叫喊，“闵可夫斯基，帮忙啊！”

闵可夫斯基在柏林读大学时，凭数学才能赢得了奖金，但他默默地放弃了，让给了更需要的同学。他的家境那时也不好，人们后来才从同学的兄弟那儿听说了这件事情。

闵可夫斯基 18 岁时，和 57 岁的爱尔兰数学家史密斯（Henry John Stephen Smith）一道因为将数表示为平方和的成果获得了令人羡慕的巴黎科学院的数学大奖。按竞赛规则，文章应该翻译成法文的，而他没来得及翻译就获奖了。史密斯不幸在获奖前两天去世。

220° 部门会议

在一次部门会上，克莱因在一大块黑板上写满了关于德国中学的数据和统计——他想尝试在其中一所学校推行教育改革。然后他转身面对同事，问他们谁有问题。“我有，”闵可夫斯基回答，“你不觉得那些数字里的素数占的比例太大了吗？”

221° 难得的骄傲

闵可夫斯基是温和而谦逊的人，很少让自己表现出任何骄傲。然而有一次，他碰巧讲了一堂关于四色猜想的拓扑学课。他告诉同学们这个猜想还没有证明，不过那只是因为一些不入流的

数学家在研究它；他觉得自己就能证明。于是他立刻就开始在课堂上证明起来。下一堂课他还接着证明，一连几个星期他都在课堂上同那个难驯的猜想搏斗。最后，在一个下雨的早晨，当他刚走进教室，就响起一声霹雳。他面对着全班严肃地说："老天在为我的骄傲震怒呢。我也证明不了四色猜想。"四色定理到今天也没证明。[4]

4 本书的写作时间是20世纪60年代。1976年，美国数学家阿佩尔（Kenneth Appel）与哈肯（Wolfgang Haken）在伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用1200个小时证明了四色定理。当然，令数学家满意的纯粹的"人脑"证明，现在还没有。

222° 闵可夫斯基谈爱因斯坦

闵可夫斯基在哥廷根告诉他的学生，爱因斯坦相对论的数学表达很拙劣。"我可以这样说，"他说，"因为爱因斯坦是在苏黎世跟我学的数学。"

223° 闵可夫斯基谈希尔伯特

希尔伯特的许多用以发表的论文是他夫人以她赏心悦目的笔迹写出来的，而且还有许多校样是他的亲密朋友闵可夫斯基审读的。闵可夫斯基在给希尔伯特的一封贺信中写道："我也祝贺夫人为所有数学家太太树立了一个良好的榜样，她将令我们永生难忘。"他也责备希尔伯特在致谢名单里忽略了一个重要人物，"你忘了感谢希尔伯特夫人，我感到很难过，以后再也不能容忍这样的事情了。"

224° 闵可夫斯基之死

一个星期天的下午，闵可夫斯基突然感到阑尾疼得厉害，到晚上才发现需要动手术。第二天情况更加恶化。他知道没希望了，强忍着在病床上修改他最近的一篇论文的校样。他向希尔伯特表达了他的命运的遗憾，因为他原想做更多的事情。他还想到

自己不能听希尔伯特在即将开始的数学讲习班讲华林（Waring）问题的课了。1909 年 1 月 12 日，星期二，中午，闵可夫斯基想见家人和希尔伯特。希尔伯特赶到医院时，温柔敦厚的闵可夫斯基已经离开人世了。

225° 宠坏了的数学孩子

哥廷根大学兰道教授生在富裕的银行之家，是在父母的娇宠中长大的。他个头小，胖乎乎的，一张孩子脸，一小撮直立的胡须，一副得意洋洋的样子。如果问怎么找他在哥廷根的家，他会直言不讳地说，“一点儿也不难；它是全城最好的房子。”

226° 兰道游戏

兰道喜欢请数学家同事到他在哥廷根的华丽家园去。晚餐过后，他请大家在他书房玩儿一些复杂而精巧的游戏。有一个我还记得很清楚。假如“见一个人”意味着“和他握手”，那么请大家寻求一个最短的数学家（或一般的科学家）关系链，将任意两个人（如希尔伯特和欧拉）联系起来。

例如，某人可能会说：“希尔伯特见戈登（Gordon），戈登见克里布施（Clebsch），克里布施见黎曼，黎曼见卡斯特纳（Kastner），卡斯特纳见欧拉。”而别人也许会指出其中的漏洞：“卡斯特纳真的见过欧拉吗？”——当然他也可能提出更短的关系链。

接着玩儿这个游戏：要多少人“见面”，才能回到华盛顿、欧拉、马丁·路德或鲍迪奇（Bowditch）？“见面的”可以是任何人，不必是科学家。

游戏也可以“横向”地在当代人物之间玩儿。例如，需要

多少人能将你我与毛泽东或史怀泽（Albert Schweitzer）联系起来?[5]（斯特洛伊克）

227° 一分为二

兰道有点儿专横和高傲，有时会惹恼哥廷根的同事和学生，很多人都怕他刁钻的机敏和不讲情面的诚实。不过所有的人都钦佩他的孜孜不倦的勤奋和对数学的忘我的热爱。哈代教授曾说，尽管几乎每个人在内心深处对别人的进步都怀有些许忌妒，兰道却令人惊讶地摆脱了这种卑微的情绪。作为解析数论专家，没几个人能比过兰道。

228° 菲勒克斯与塞格

一个学生请兰道鉴定一块琥珀。德文“琥珀”是 Bernstein。兰道没看出这块琥珀有什么特别的好处，于是回答他说：“菲勒克斯。”原来，有两个叫 Bernstein 的数学家，菲勒克斯（Felix Bernstein）和塞格（Serge Bernstein），兰道认为塞格远比菲勒克斯高明。

229° 费马大定理

兰道为了回答那些寄来费马大定理“证明”的人，准备了一张表格，是这样写的：“在第__页第__到__行，你会发现一个错误。”填表的任务就落到了无薪讲师的身上。

230° 意外

在与哈代的多年合作中，里特伍德总是躲在后面，不惹人注意。有一次，里特伍德来哥廷根访问兰道，兰道忍不住说：“原

5 史怀泽（1875～1965），法裔德国哲学、神学、医学和音乐家，20 世纪人道精神的划时代巨人。青年时代学音乐，后来在非洲丛林从医 35 年。他曾发愿“30 岁以前把生命献给传教、教书和音乐，若能达到研究学问和艺术的愿望，那么 30 岁以后就可以直接进入一个立即服务的方向，把个人奉献给全人类。”1953 年 10 月 31 日获诺贝尔和平奖。

来还真有你啊！我原想你不过是哈代的一个假名，专门用来发表那些他认为不配以他的名字发表的不太好的文章。”（参见《重游数学圈》R301）。

231° 小问题

这是道格拉斯（Jesse Douglas）津津乐道的一个故事。有一次，他在哥廷根听兰道讲傅里叶级数，兰道在解释所谓吉布斯（Gibbs）现象时说：“这个现象是来自英国的数学家 Gibbs［他读成 Dzjibs］在 Yale［他读成 jail］发现的。”道格拉斯说，出于对兰道的尊重，他才没有当面指出，“教授先生，您说的绝对正确，不过有一点儿小问题。Erstens，他不是英国人，而是美国人。Zweitens，他不是数学家，而是物理学家。Drittens，他的名字是 Gibbs，不是 Dzjibs。Viertens，他不在监狱，而是在耶鲁。而且，发现那个现象的不是他。”[6]（斯特洛伊克）

6 任何周期函数都可以用三角级数来逼近，即所谓傅里叶级数。吉布斯现象是傅里叶级数在间断点附近的一种“不良”行为，即级数和总存在波动，在间断点处产生 18% 左右的偏离。这个现象首先由 H. Wilbraham 在 1848 年发现。吉布斯最早对它进行了详细的研究。

232° 兰道离开哥廷根

随着德国国家主义的兴起，许多犹太学生和老师都开始离开哥廷根。那时，希特勒成为德国首相，大学将所有完全犹太血统的人都从教学岗位上驱赶下来，犹太人才的大逃亡真正开始了。兰道因为他那富裕的家庭，不可能一个人离开德国。他努力继续讲课，但当他宣布要讲微积分课时，一群无法无天的暴徒却把他挡在讲堂外面。于是，他最后还是离开了哥廷根。哈代教授为他在英国安排了系列演讲。哈代的报告说：“看到他为重新回到黑板而快乐，也为失去机会而悲伤，真令人同情。”

233° 兰道夫人说丈夫

几年前，在宾夕法尼亚大学，勋伯格（Isaac Schoenberg）教授请了很多研究生去他家吃自助餐。我们到那儿时，来访的兰道夫人（兰道的女儿原是勋伯格的第一个太太）走下来和大家见面。她听见我们在说一些我们正在研究的问题，也天真地说："你们知道吗，我丈夫也算是一个数学家呢。"这在我看来真是最朴素的评价。(梅尔胡贝)

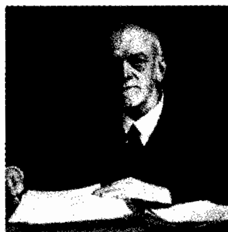
大　　师

希尔伯特是近代最伟大的数学家，在直觉与逻辑之间，个别具体问题与一般抽象概念之间，纯数学与应用数学之间，以及数学与科学之间，达到了完美的和谐。

我们在数学领域工作的人，大概都有一个最令我们敬佩的偶像。希尔伯特长期以来就是作者的偶像。于是，作者乐意在这儿为他的一本新近的传记唱几句赞歌——雷德（Constance Reid）的《希尔伯特》（Springer Verlag, 1970），一本真正卓越的传记，为后来写数学家传记的作家们树立了一个光辉的典范。[7] 即使我们的小故事书只不过让某些读者对那本优美的传记发生一点儿兴趣，也算是成功了。这儿讲的很多希尔伯特的故事，有时在雷德的书里有略微不同的说法。

凭着卓绝的才能和非凡的多能，希尔伯特给数学家们洒下了动人的乐观主义和活跃的生命力——也许那只能叫"希尔伯特精神"，但愿那精神永存！希尔伯特在哥廷根的墓碑上刻着大师自己的乐观主义的宣言：

7 中译本，《希尔伯特》，袁向东、李文林译，上海科学技术出版社，1982。(2006年新版，《希尔伯特——数学世界的亚历山大》，上海世纪出版集团"开放人文"丛书。)



1937 年的希尔伯特



哥廷根的希尔伯特墓碑

Wir mussen wissen.

Wir warden wissen. [8]

8 “我们必须知道；我们必将知道！”

234° 灵感

散步似乎有助于思考，很多数学家都是在散步过程中得到他们的伟大思想的。两三个或一小群数学家漫步乡间讨论数学是司空见惯的事情，而许多数学家即使一个人在书房里也喜欢一边构

思数学一边不停地踱步。

希尔伯特声称他在户外工作最好。于是，他在邻居的墙上做了一块18英尺长的黑板，还在那儿修了一条带雨棚的小路，这样他在任何天气下都能走出来工作。有时候，他也会停止踱步，中断黑板上的计算，骑着他的自行车在花园里兜几圈儿，或者拔几根杂草，修剪一下花木。当有人来访，女仆会让他去花园，还告诉他，如果大师不在黑板前，就到树丛里去找。

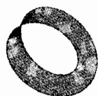
235° 和文化部长交涉

赫克（Erich Hecke，1887～1947）后来成了卓有成就的数学家，而他早年在哥廷根是希尔伯特的助手。尽管他当年的工作每月只挣微不足道的50马克（相当于那时的12.5美元），但他总认为给希尔伯特当助手是一生的重要经历。

希尔伯特觉得赫克应该得到更多的报酬，他告诉赫克下次去柏林会向文化部长提出这个问题。机会很快来了。希尔伯特和部长讨论了大学事务后，发觉自己忘了什么事情。于是，他把头探出部长的窗户，对着在楼下停车场等他的夫人喊道，“卡瑟，卡瑟，我还要给部长说什么事儿来着?”“赫克，”希尔伯特夫人回应说。希尔伯特回过头来，对一脸惊讶的部长提出了赫克薪水加倍的要求。事情落实了。

236° 沃尔夫斯凯尔奖

达姆斯塔特（Damstadt）数学教授沃尔夫斯凯尔（Paul Wolfskehl，1856～1906）去世时，给哥廷根科学学会留下100 000马克，用以奖励第一个证明费马最后“定理”的人。奖金发出之前，其利息由学会的一个委员会决定使用。委员会主席希尔伯



特决定用2500马克的利息请庞加莱来哥廷根做系列演讲。他后来还以同样方式安排了其他数学家来哥廷根访问。有人问希尔伯特为什么不试试证明费马最后的“定理”，去赢得沃尔夫斯凯尔的奖金。他回答：“为什么要去杀死一只会下金蛋的鹅呢?”

第一次世界大战期间，德国螺旋式的通货膨胀最终使沃尔夫斯凯尔的那笔奖金变得一文不值。

237° 通货膨胀

第一次世界大战后，德国马克随指数式通货膨胀而迅速贬值。从《数学纪事》杂志猛涨的价格可以清楚地说明这种情形。瑞德在《希尔伯特》一书中报告，它在1920年的价格是64马克，1922年初是128马克，年底是400马克。到1923年，价格成了800马克，而1923年底，是28 000马克。

1923年，德国政府采用了新的钞票单位（叫Rentenmark），通货膨胀才迅速制止下来。希尔伯特疑虑地指出，不能仅仅靠改变独立变量的名称来解决问题。

238° 好的数学问题

1900年夏在巴黎举行的国际数学家大会上，希尔伯特列举并讨论了当时尚未解决的23个重要数学问题，他认为，其中任何一个问题的解决都将极大促进新世纪的数学发展。在讨论问题之前，他简单说明了一个好的数学问题是由什么构成的。他说，好问题应该是：（1）清楚而容易理解的；（2）困难但不是没希望解决的；（3）能激发更多成果的。[9]

参见后面S283。

239° 月球上抓苍蝇

有人问希尔伯特他认为什么技术是最重要的。他回答说："在月球上抓苍蝇。"提问者很惊讶，问他为什么。希尔伯特指出，在月球上抓住苍蝇之前，首先需要解决的相伴随的技术问题，应该包括几乎所有人类面临的物质难题。

240° 捍卫伽利略

有人责怪伽利略在宗教裁判所的变节行为（见《走进数学圈》156）。希尔伯特反对说："伽利略不是白痴，只有白痴才相信科学需要殉道者——宗教也许需要，但科学结论到时候会自己确立起来。"

241° 希尔伯特的"情人们"

希尔伯特喜欢年轻漂亮的女孩子，像天真的孩子似的和她们玩儿闹。他很会说甜言蜜语，还在花园里为他的"情人们"种了鲜花。他特别喜欢和漂亮的女子跳舞，在舞会上经常可以看到他和同事的年轻漂亮的妻子翩跹起舞，然后毫不顾忌地拥着她，在唇上留下深深的一吻。

在他的一次生日聚会上，他双臂揽着两个白天为他护理的年轻护士，坐在隔壁的房间里。当有人催他出去听为他准备的热情洋溢的讲话时，他说他更喜欢呆在那儿。

在另一个生日聚会（他 50 岁时），学生们决定用"爱的字母"来祝贺希尔伯特——为字母表的每个字母编两句韵文，说说他的某个以那个字母打头的"情人"。写到字母 K 时，他们找不出那样的名字。最后，希尔伯特太太出来了，她的名字是

Kathe，她说这回总该想起她了吧。于是，快乐的同学们编出了下面的联句：

Gott sei Dank, nicht so genau,
Nimmt es Kathe, seine Frau. [10]

10 “感谢上帝，他的夫人卡瑟不太在意。”

希尔伯特有一个很善解人意的太太。

242° 直率

希尔伯特会直率得近乎粗暴。如果哪个学生讲的东西太容易了，他会打断说：“可那完全是基本的啊。”如果哪个同学的报告不充分，他会严厉地斥责：“你的报告什么也没说，除了粉笔还是粉笔，粉笔！”如果哪个同学太罗唆，他会说：“我们只要蛋糕上的葡萄干。”

关于他的物理学同事，希尔伯特说：“物理学对物理学家来说太难了。”他曾问一个人某个数学家是否健在，那人说还在。接着告诉他那个数学家住哪儿，在教什么课，做什么研究，家里情况如何，等等。希尔伯特最后打断他说，“好的，可我不想知道那些；我只想问，他是否存在？”有一次，人家问他怎么看占星术，他回答：“如果你把世界上最聪明的十个人集合到一起，请他们找出世界上最愚蠢的东西，他们也找不出比占星术更愚蠢的东西来。”

243° 希尔伯特的刻薄

希尔伯特很严厉。有那么一次，他在数学俱乐部打断一个说话人：“我亲爱的同事，你显然不懂什么是微分方程。”那人感

到震惊和羞辱，快步走出房间到隔壁的数学图书馆去了。在场的许多人都埋怨希尔伯特说话太刻薄。“可是很清楚他真的不懂什么是微分方程，”希尔伯特反驳说，“看吧，他现在到图书馆查书去了。”

还有一次，维纳(那时还年轻)在数学俱乐部发表了一个重要的谈话。会后，一群人步行去经常聚餐的罗恩（Der Rohns）餐厅吃午饭。吃饭时，希尔伯特大谈他在哥廷根听过的一些重要演讲。他说，最近的几次演讲比几年前的差远了，去年的演讲尤其拙劣。“除了今天下午的，”他说。这时，维纳正想着听恭维话呢，希尔伯特接着说，“今天下午的演讲是我所听过的最糟糕的一个。”

244° 枢密顾问先生

有个人老是围着希尔伯特，“枢密顾问先生”叫个不停，他注意到教授有点儿生气的样子，不安地问，“我令您讨厌了吗，枢密顾问先生?”“你没有什么令我讨厌的，”希尔伯特回答，“除了你的谄媚。”

245° 薄弱的记忆力和迟钝的理解力

希尔伯特一生都缺乏记忆，掌握别人的新思想也很迟钝。他后来说，数学之所以吸引他，就是因为它不需要记忆——他总能自己发现那些东西。至于任何新思想，为了正确理解，他不得不靠自己从头到尾梳理它们。在数学家的集会上，他对新思想的迟钝令好多思维敏捷的人非常惊讶。

246° 希尔伯特的迟钝

希尔伯特要费很多工夫才能掌握数学的新思想和复杂概念，参加哥廷根数学俱乐部的年轻人常常惊讶，他们能一眼看出的东西，希尔伯特却很困难。希尔伯特感到困惑时，会打断讲话者，要求他说清楚。结果，经常是所有在场的人都来帮助他理解。希尔伯特自己承认，不论什么时候读数学、听数学，他都觉得很难（有时几乎不可能）去理解那些解释。为了掌握它，他只好从头做起，一点点思考，靠自己发现它——而且经常以一种新的更简单的方法。

247° 希尔伯特讲课

尽管希尔伯特是一个动人的演说家，但他经常在黑板前犯糊涂。他备课时只准备提纲，让细节在讲课过程中推导出来。即使在基础课上，他也经常在黑板前不知所措。这种时候，他会把问题放在一边，挥挥手说，那个问题太容易了。幸运的是，他有一个了不起的助手，在做完课堂笔记后，会接着澄清那些模糊的部分，以便后来的学生能有一个清楚的讲义。

248° 存在

为了说明某个事物存在的断言，只需要做一个纯粹的存在性陈述，而不必生成一个具体的东西。希尔伯特经常对同学说："在演讲厅的人当中，有一个人头上的头发最少。"这总是引发一阵哄笑，大概是因为他说的那人就是他自己。

249° 希尔伯特与新量子力学

我参加过希尔伯特的研究班。一天下午，他跑进教室，对着我们大喊："你们还在这儿坐着谈你们的小问题！我刚从物理研究班过来——und da machen sie gerade die groszartigsten Sachen！"[11]

11 "人家正在做最伟大的事情呢！"

那是 1925 年，那个研究班是玻恩（Max Born）的。海森伯刚在那儿讲了他的新量子力学。（斯特洛伊克）

250° 希尔伯特与素数

1925 年，我在哥廷根听希尔伯特的数论课时，他从写 100 以下的所有素数开始。在接着讲课之前，他跑进教室说，"哎呀，我忘了一个素数！Das darf nicht sein, sie sind schon-man muss sie gut behandeln！"[12]（斯特洛伊克）

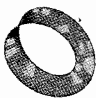
12 "这不可能，它们太美妙了——应该好好对待！"

251° 学生的心愿

有时候，别的研究机构想把希尔伯特从哥廷根引诱出来。1902 年，福克斯（Lazarus Fuchs，1833～1902）去世，柏林大学就曾请希尔伯特去接替他的职位。

柏林在"召唤"的消息传到了哥廷根的数学学生的耳朵，引起一阵混乱，他们担心希尔伯特也许会接受邀请。最后，选出以里兹曼（Walther Lietzmann，后来也成为著名数学家）为首的三个学生代表去希尔伯特家请愿，请他留在哥廷根。希尔伯特听着同学们说，却一言不发。代表们喝了一点儿希尔伯特夫人准备的果酒，泄气地离开了。

希尔伯特似乎迟迟不作决定，他又经常去柏林，加上大家都看出他的心思显然不完全在教学上，于是每个人都相信他准备接



受柏林的职位了。然而实际情况是，希尔伯特在筹划如何利用柏林的邀请来改进哥廷根的数学系。最后，作为他留在哥廷根的条件，他获准在哥廷根设立一个新的数学教授，请闵可夫斯基就任。整个操作需要很高的外交技巧。

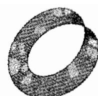
当哥廷根数学俱乐部的学生和会员们最后听到希尔伯特留下而闵可夫斯基要来的好消息，就以希尔伯特的名义举行了盛大的烟酒晚会，克莱因在会上发表了热情讲话，盛赞希尔伯特的数学功绩。

252° 希尔伯特与阿克曼

希尔伯特反对数学家和科学家年纪轻轻就结婚，那会妨碍他们履行自己对学科的责任。阿克曼（Wilhelm Ackermann，1896～1962）与希尔伯特合作写过一本卓越的逻辑学著作，他结婚时，希尔伯特非常生气，拒绝在学术上进一步帮助他。没有希尔伯特的帮助，阿克曼得不到大学职位，天才的年轻人只好去中学教书。希尔伯特后来听说阿克曼夫妇想要小孩儿，大声叫道，“真是好消息啊，那样我就用不着再为那个疯子做任何事情了。”

253° 黎曼假设

有一个故事（可能是杜撰的）大概说，希尔伯特的一个学生提交过一样东西，声称是黎曼假设的证明。希尔伯特为同学的努力而感动，尽管他发现了其中的错误。不久之后，那个同学死了，希尔伯特征得孩子父母的同意在葬礼上讲了几句话。天下着雨，孩子的父母和朋友立在墓旁，希尔伯特走上前去。他先为天才少年的早逝感到悲哀，然后接着说，尽管年轻人的黎曼假设证明有一个错误，但以后很可能会有人沿着他的路线获得正确的证



明。“事实上，”尽管雨还不停地在墓旁下着，他两眼突然一亮，接着说，“令$f(z)$为复变量z的函数，考虑……”

254° 希尔伯特与希尔伯特空间

许多数学概念在推广和延伸，远远超越了它原来的内容，而那思想的动机也几乎无法识别了。希尔伯特提出的一个光辉思想也是这样的——他在多维欧几里得空间的二次曲面几何理论与线性微分和积分算子之间建立了一种惊人的同构，从而天才地用几何来为分析服务。希尔伯特的这种几何思想后来发展成为一个抽象而复杂的体系，1931 年，冯·诺伊曼在他的一篇重要的关于量子力学数学基础的论文中，称它为希尔伯特空间。薛定谔早期的量子力学工作特别重视希尔伯特原先的思想，但后来随着量子理论的发展，冯·诺伊曼建立了更加抽象的方法，冲破了希尔伯特的几何图景。于是，希尔伯特的基本几何论证被转换为更抽象的分析和形式的语言，不过仍然保留着以前的很多几何名词。有个故事说，希尔伯特退休以后，参加过哥廷根的一个研讨班，课堂讨论了希尔伯特空间的一些数学结果。讲课结束时，希尔伯特站起来问：“先生，您能告诉我什么是希尔伯特空间吗?”

255° 遗传

希尔伯特的儿子弗朗兹（Franz）小时候不大喜欢数学。希尔伯特常说：“他从他母亲那儿继承了数学能力，而别的东西都是从我这儿去的。”

256° 弗朗兹

弗朗兹是希尔伯特夫妇惟一的孩子，很有些可怜。他 1893

年夏天出生在克朗兹（Cranz）的海滨渡假村。小时候父亲对他寄予厚望，尽管孩子并不愚钝，也不乏天赋，但他似乎很脆弱，而且有时还发愣。在学校，他似乎记忆力不强，所以成绩也不好。后来，当兵不成，他做过好些琐碎的工作，都没成功。他感到越发烦闷。有一天，他精神彻底崩溃，被迫进了精神病院。这时，希尔伯特拒绝承认儿子，令夫人更加伤心。弗朗兹后来从医院出来，又做了些零星的事情，但没有一个能坚持下来的。随着年龄增长，他越来越像他著名的父亲。他努力模仿父亲的行为举止，可失去了父亲的精神力量，他的模仿不过是可悲的炫耀。他常说要学数学，以便能欣赏父亲的工作。1945 年，希尔伯特夫人在丈夫去世两年后，几乎双目失明地离开了人世，灵前一个老朋友都没有。弗朗兹只好乞求一个对他家不太熟悉的妇人说了几句话。弗朗兹本人活得很长，1969 年 76 岁时去世。

一个数学英雄在个人生活中远不是什么英雄，听说这一点我们都会感到失望吧。

257° 想象力

如果哪个数学家一旦改行做了小说家，定会出现一些惊奇——这怎么可能呢？希尔伯特认为那太简单了：那人缺乏足够的想象力做数学家，却足够做一个小说家。

258° 观点

有一次，希尔伯特说，有时一个人的宽广胸怀会变得越来越小，当半径趋于零时，它趋于一个点，那个点就是人的观点。

259° 蛙与鼠的斗争

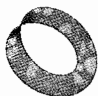
以布劳维尔（L. E. J. Brouwer）为代表的直觉主义和以希尔伯特为代表的形式主义之间，常发生论战，有时双方真的是剑拔弩张。

布劳维尔应邀来哥廷根数学俱乐部讲他的思想，有人反对说："你说我们不能判断陈述'π的小数展开里出现序列0123456789'是对或错。也许我们是不能，可上帝能。""我没有和上帝沟通的途径。"布劳维尔不高兴地回答。最后，希尔伯特站了起来。"照你的原则，"他对布劳维尔说，"现代数学的大多数结果都该被抛弃了；对我来说，最重要的事情是去更多地获得数学结果，而不是更少。"

布劳维尔为他的事业发了狂，把希尔伯特当做他的私敌。在一个数学家集会上，当在场的范德瓦尔登说希尔伯特是他朋友时，布劳维尔竟迈步走出了会场。

布劳维尔和希尔伯特同为《数学纪事》编委会成员。希尔伯特是三个主编之一，布劳维尔是七个编委之一。布劳维尔要求所有投给《纪事》的荷兰数学家的论文和所有拓扑学的论文都交给他审查。其他编辑反对他这种独裁式的要求。希尔伯特担心《纪事》闹分裂，觉得应该把布劳维尔赶出编委会。他还担心，万一自己因为健康原因离开了杂志，布劳维尔可能会把持它，危害它。由于很难让布劳维尔一个人辞职，编委之一的卡拉西奥多里（Carathéodory）建议解散七人编委会。希尔伯特断然采纳了这个建议。

爱因斯坦也是三个主编之一，他对这场争斗感到大惑不解，也辞职了。他奇怪的是，"这场数学家中间的青蛙与老鼠的斗争到底为了什么？"



260° 希尔伯特谈排中律

数学哲学的直觉主义学派的基本原理之一是，排中律并不普遍成立——它只在有限情形成立，而在无限情形不成立。而排中律在数学中经常以禁止形式发挥着巨大的威力。希尔伯特声明："禁止数学家用排中律就像禁止拳击手用拳头。"

261° 没有烤鹅

第一次世界大战期间，德国食品特别是肉食品开始紧缺，希尔伯特和其他学术界的头面人物应校长之请到大会堂聚会。在上一次类似的聚会中，学校给到场的教授们分发了肥美的鹅肉。希尔伯特想这次聚会也该是为着同样的理由，他思忖着能分到更多的鹅肉，也许还有别的肉食品呢。大家聚会时，才发现没肉要分发；原来，校长只是想借一个盛大的典礼来宣布，伟大的威廉皇帝（Kaiser Wilhelm）刚才对敌宣布了无限制潜艇战。在其他教授的庆祝声里，希尔伯特感到失望而厌恶，他对身边的人说："德国人就像那样。他们不想要鹅；他们更喜欢无限制潜艇战。"（范德瓦尔登）

262° 纪念达布

1917 年，美国对德宣战的那年，伟大的法国数学家达布（Gaston Darboux，1842 ~ 1917）去世了。希尔伯特很钦佩达布，他立刻准备写一篇纪念文章在《新闻报》（*Nachrichten*）发表。文章出现后，一群愤怒的学生闯进了希尔伯特的家门，要他否认并撤回纪念敌国数学家的文章。希尔伯特拒绝了，并警告说，如果官方不为学生的野蛮行为向他道歉，他就辞职离开学校。他收

到了道歉，文章还在印刷中。

263° 告文明世界书

第一次世界大战期间，为了表示文化的德国支持军事的德国，一份草拟的“告文明世界书”，在一些大科学家、艺术家和作家中传阅，要他们签字。它声明德国没有发起战争，还列举并否认了“敌人的诽谤和谎言”。克莱因是热情的爱国者，没仔细看就签名了，等他后来有时间看了他签名的是什么东西时，才感到有些沮丧。希尔伯特也是征求签名的对象，他拒绝了，于是很多人把他看成叛徒。另一个没签名的名人是爱因斯坦，那时在柏林的威廉皇帝研究所。不过，爱因斯坦已经转为瑞士公民，所以躲过了叛徒的骂名。克莱因被巴黎科学院除名；希尔伯特被允许继续留下。

整个战争和随之而起的反犹太浪潮对希尔伯特来说简直不可理解。他从未真正理解它。他不能解释本该是文明人的这种反常行动。

264° 医学成就

刚过60岁，希尔伯特就感觉身体状况越来越坏，到1925年秋，他被诊断为恶性贫血。这种病那时还没有治疗方法，希尔伯特的医生预言他只能活几个月。但哥廷根的一个药学家朋友碰巧在《美国医学会杂志》看到米诺特（G. R. Minot）有关恶性贫血的工作，患者通过服用一定量的肝素萃取物，可以使血液再生。兰道夫人和医学界有联系，[13]在柯朗（Richard Courant）的帮助下，给当时在哈佛的米诺特发去一封很长的电报，请求他帮助病情正在恶化的希尔伯特。为了把事情落实下来，他们又给哈佛

13 兰道夫人是治疗梅毒的606砷剂的发明者艾里奇（Paul Ehrlich）的女儿。

数学系的科洛格（Kellogg）教授发了另一封电报。

米诺特和他的助手们不是很乐意——他们手中的肝素太少了，而患者需要终生服用，在美国也还有垂死的恶性贫血患者等着它呢。同为哈佛数学家的伯克霍夫（Professor George Birkhoff）教授最近刚看了萧伯纳的戏《医生的困惑》，医生只能救10个人，他必须决定应该救谁。伯克霍夫向米诺特引用了戏中的台词，米诺特终于答应了。[14]

14 戏里说，"应该根据他们对人类的贡献来决定［救什么人］"。

米诺特给哥廷根的那个药物学家发了电报，告诉他在肝素精到达之前应该怎样为治疗准备生肝。希尔伯特说，他宁愿死也不愿吃生肝。不过肝素精终于到了，希尔伯特的身体很快就好起来，远远超过了医生原先的预期，他又活了近20年。

265° 一个反犹分子

数学家别伯巴赫（Ludwig Bieberbach）是个积极的反犹分子。他和几个人一起用功分析了德国数学家与犹太数学家的差别，为的是证明犹太人很卑微。

有个笑话说，哥廷根大学惟一的非犹太日尔曼数学家的血管里倒真的流淌着犹太人的血液。原来，希尔伯特患恶性贫血时，曾接受过柯朗的输血。

266° 别伯巴赫与第二届国际数学家大会

别伯巴赫是热情的国家主义者，战争结束后还强烈反对派代表出席1928年在波洛尼亚召开的第二届国际数学家大会。在布劳维尔的支持下（尽管他是荷兰人，却拥护德国国家主义），别伯巴赫给德国的高中和大学学生写了封信，号召他们联合抵制这次会议。希尔伯特写信表示反对，揭露了别伯巴赫的荒唐。他

说，那只能给德国科学带来不幸，使德国遭到大家的正当批评。

267° 希尔伯特与第二届国际数学家大会

尽管身体还没完全康复，1928年，希尔伯特还是带领了67人的德国数学家代表团参加在意大利波洛尼亚召开的第二届国际数学家大会。这是德国科学家战后第一次参加国际会议。全体代表起立为德国代表团鼓掌欢呼。希尔伯特说："我很高兴，经过了漫长的艰苦岁月之后，所有国家的数学家又走到一起来了。我们热爱的科学进步也应该这样，而且必须这样……在不同国家和种族间制造差别是对我们科学的完全误会，是没有正大光明的理由的。数学家眼里没有种族或地理的边界，因为数学的文明世界就是一个国度。"

我们的数学英雄也是个人生活的英雄，这一点令人高兴。

268° 希尔伯特的宾馆账单

第二届国际数学家大会闭幕后，希尔伯特去宾馆结账，别人告诉他大会组委会已经负担了他的食宿费。"噢，早知道就好了，"他说，"我就会多吃一点儿。"

269° 希尔伯特街

1930年，希尔伯特从教学岗位退下来时，哥廷根的一条街被命名为希尔伯特街。"大卫，拿你的名字来命名一条街，"希尔伯特太太问丈夫，"那主意不是挺周到的吗？""主意倒无所谓，重要的是行动，"希尔伯特回答，"克莱因就死在用他的名字命名一条街之前。"

270° 死亡比较

希尔伯特去世时，玻恩在战火纷飞的英国（闵可夫斯基去世时他在哥廷根），他很奇怪："希尔伯特比他朋友闵可夫斯基多活了30多年，老天让他继续做他的重要工作。可有谁愿意说，他孤独地死在纳粹的黑暗年代，是不是比在辉煌中死去的闵可夫斯基更令人悲哀呢?"

第四象限

从“非常”教授
到思想车轮

哥廷根数学家的故事（续）

下面还是几个在哥廷根学习或教书的数学家的故事。克莱因在那儿做了多年的数学系主任。

271° 寻常和非常

在德国，“非常”教授不过是助理教授，在教工圈子里，比“寻常”教授(正教授）的地位低得多。哥廷根的学生有他们自己的解释:“非常教授不懂寻常事物,而寻常教授不懂非常事物。”

272° 伟大的菲勒克斯

菲勒克斯·克莱因（Felix Klein，1849 ~ 1925）有时请学生和同事去他家吃饭，而他却把宴会的气氛弄得很庄严。主人家令人敬畏，当学生被问到问题时，总是站起来回答。

273° 不近人情的神

克莱因很看重自己和他的许多计划。据说，他允许自己开两次玩笑，一次在秋季学期，一次在春季学期。他的时间安排很细，即使女儿和他谈话，也得预约。

274° 失礼

“枢密顾问”是德国科学界最受人尊敬的头衔，相当于英国科学家被封为爵士。希尔伯特和克莱因都得到过枢密顾问头衔，希尔伯特没把它当回事，克莱因却坚持要别人那样称呼他。维纳有一次去访问克莱因，就犯了忌讳。他在克莱因的家门口看见一

个上年纪的女管家，就问："克莱因教授在家吗?"管家带着严厉斥责的语气回答他说："枢密顾问先生在家!"

275° 三段论

随着年纪大了，克莱因变得越来越威严，哥廷根的学生都津津乐道一个"三段论"："哥廷根有两种数学家——有些人做自己想做而克莱因不想做的事情，另一些人做克莱因想做而他们自己不想做的事情。克莱因显然两种人都不是。因此，克莱因不是数学家。"

276° 计算机朗格

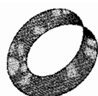
1904～1905 年冬季学期，著名数学物理学家朗格（Carl Runge，1856～1927）成为哥廷根的一员。不久，克莱因、闵可夫斯基和希尔伯特每个星期二的散步"三重唱"就成了"四重奏"。朗格有着非凡的计算本领，也令新同事感到惊奇。有一次，他们正为几年后召开的一个会议定时间表，需要知道复活节的日期。要确定复活节的日期并不简单，它和月相有关。[1] 于是，数学家们开始去找年历。但朗格站着想了一会儿，然后在朋友们的惊讶中说出了那个日子。

1 复活节是纪念耶稣复活的节日，是3月21日或那日之后月圆后的第一个星期天。

277° 朗格滑雪

朗格成了哥廷根老师的运动健将，他在同事中推广滑雪。希尔伯特和一些年轻老师都决定在朗格的训练下学习这种刺激好玩儿的运动。

一天，在哥廷根数学俱乐部的周末聚会上，希尔伯特给朋友闵可夫斯基讲了他那天早晨滑雪的惊险经历。他说他掉进沟里



了，摔得四脚朝天。正在那时，一块滑雪板也掉下来，滑下山去了。于是他只好脱下另一块滑雪板，拿着它深一脚浅一脚地踏雪下山，去找那块滑落的滑雪板。希尔伯特最后说，那可真不容易啊。

闵可夫斯基问："你怎么不让另一块滑雪板也沿着第一块的路线滑下山去呢？它就能停在它的旁边了。"

"哦，"希尔伯特回答，"朗格可没那么想过！"

我们也许可以说，《重游数学圈》R303 不过是这个故事的一个"残本"。

278° 不可能的证明

策梅罗（Ernst Zermelo，1871～1956）是个孤独者，不喜欢交朋友，宁愿与威士忌为伴。在哥廷根时，他常论证说任何人都不可能到达北极点，因为，他说，到任意纬度所需要的威士忌与纬度的正切成正比。[2]

2 读者应该记得，90°（北极点的纬度）的正切为无穷大。

279° 沃策梅罗迪

当别人问策梅罗他那不寻常的名字时，他会解释说，本来是沃策梅罗迪（Walzermelodie），但后来不得不割去前后两个音节。

280° 努力无贵贱

26 岁的康斯坦丁·卡拉西奥多里（Constantin Caratheodory，1873～1950）正要走进前途无量的工程师生涯的时候，不顾家庭的反对，决定转向，一生从事纯数学的研究。他觉得只有这样，生命才真的有意义。卡拉西奥多里家族很有名望，在希腊颇具影响，家族格言是："努力无贵贱"。康斯坦丁践行了这句格言，

对数学(特别是函数论)做出了重要贡献，还写了几部经典著作。

281° 布兰门托的论文

布兰门托（Otto Blumenthal，1876～1944）还是哥廷根的学生时，有一天伤心地发现他学位论文里最精彩的部分已经在别人的论文里写过了。他把这个令人沮丧的事实告诉了希尔伯特，大师只是耸耸肩问："你干吗读那么多文献?"

282° 布兰门托之死

在希特勒上台的那些悲惨日子里，布兰门托在朋友帮助下跑出德国到了荷兰。但在一次对荷兰犹太人的例行搜捕中，德国盖世太保抓住了布兰门托，把他送到捷克斯洛伐克的一个小村庄特里森斯塔特（Theresienstadt），那儿已经被德国人改造成了一座专门囚禁老犹太人的监狱。有一次，布兰门托被装上去臭名昭著的奥斯威辛（Auschwitz）的火车，但在火车启动前，又被奇怪地转移了。1944 年年底的某个时候，他在特里森斯塔特去世。

283° 荣誉族的第一人

希尔伯特在巴黎提出了著名的 23 个问题，最先得到解决的是第三个。解决问题的是希尔伯特自己的一个学生，22 岁的德恩（Max Dehn，1878～1932），在问题提出那年（1900）他已经部分解决了它，第二年就完全解决了。于是，德恩成为所谓"荣誉族"(即部分或完全解决 23 个问题之一的数学家)的第一人。[3]

3 关于"荣誉族"，还有专门的一本书(《荣誉族》，湖南科学技术出版社，2007)。

284° 讲师诺特

诺特（Emmy Noether，1882～1935）是个笨拙的讲师，不会

讲课。于是，听她课的人总是很少。然而，在哥廷根，有一天她走进教室时，惊奇地发现除了寻常的学生外还来了好多旁听的同学，总人数超过 100 了。课后，她收到一张字条，上面写着："旁听的同学和老同学一样明白你的课。"

285° 诺特的孩子

诺特不仅关心学生的学业，也关心他们的生活。在哥廷根，那些学生被称为"诺特的孩子"。(Rora Iacobacci)

286° 希尔伯特与诺特

诺特已经出名了，可还是进不了哥廷根的教授行列，因为多数人反对女子加入。希尔伯特在一次教授会议上说："但我的先生们，大学可不是泳池啊！"

那时候，还没有男女混合泳池。(斯特洛伊克)

287° 玻恩的考试

玻恩在哥廷根写毕业论文时，问希尔伯特他该如何准备考试的数学部分。希尔伯特问他感觉哪一部分复习最差，玻恩告诉他，"理想理论。"玻恩这时想的是，考试的时候希尔伯特大概不会问他任何理想理论的问题了。可到了决定性的那天，他才发现希尔伯特的所有问题都是那个领域的。玻恩后来提起这件事情时，希尔伯特说："我只是想知道你对你一无所知的东西到底知道多少。"

288° 玻恩的两度失望

量子力学发展之初，哥廷根的两个主要人物是玻恩和他最得

意的弟子海森伯。玻恩是温和谦逊的犹太人，眼看着海森伯陷入了高涨的德国的国家主义，最终成为纳粹的一员。

战后，玻恩退休去了英国，他最好的学生是福克斯（Klaus Fuchs）。福克斯后来向英国当局承认，他作为物理学家在洛斯阿拉莫斯为原子弹计划工作期间，向俄罗斯间谍传过重要情报。

289° 玻尔兄弟

在玻尔兄弟尼尔斯和哈拉德还小的时候，家里的一个朋友很同情他们的母亲养了这样两个呆头呆脑的孩子。尼尔斯（Niels Bohr，1885～1962）因为杰出的科学成就成为丹麦的民族英雄，哈拉德（Harald Bohr，1887～1951）被认为是丹麦最伟大的数学家。

290° 哈拉德·玻尔的考试

哈拉德（在哥廷根）的博士考试是在报纸的体育版报道的，他很得意这一点与众不同，也许没有第二个这样的人了。原来，他是著名的运动员，在 1908 年奥运会上，他代表的丹麦足球队获得了亚军。

291° 西格尔到哥廷根

第一次世界大战期间，西格尔（Carl Ludwig Siegel）拒绝参加德国军队，因此被关进了精神病院。医院紧邻兰道父亲的诊所。这样，西格尔结识了那位哥廷根的著名数论家。结果，西格尔在 1919 年成为哥廷根大学数学系的学生。很快他成为世界最杰出的数论家之一。

292° 可怜的预言

希尔伯特在1900年巴黎国际数学家大会上提出的23个未解重要问题中，第七个是证明$2^{\sqrt{2}}$是（或不是）超越数。这个问题30年都没能解决。

1920年，在一次数论演讲中，希尔伯特给听众举了几个例子，乍看起来简单而实际上非常困难。他选择了黎曼假设、费马大“定理”和$2^{\sqrt{2}}$的超越性。他指出，黎曼假设问题已经有了进展，他也许能活着看到它的解决；他还说，在座的年轻同学，如果活得足够长，也许能看到费马最后“定理”的崩溃；但是，他强调，在场的人没有一个能活着看到$2^{\sqrt{2}}$的超越性的证明。西格尔当时是哥廷根的一个23岁的学生，他听了希尔伯特的演讲。大约10年后，他利用俄罗斯数学家盖尔丰德（A. O. Gelfond）的某些工作（确立了$2^{\sqrt{-2}}$的超越性），成功证明了$2^{\sqrt{2}}$的超越性。

而黎曼假设和费马最后“定理”到今天仍然是没能证明的猜想！[4]

4 费马最后“定理”已经由英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）在1995年证明了。我们也许还记得《重游数学圈》（R304）的故事，希尔伯特在那儿表达的观点是大不相同的。也许是后来他更加意识到了黎曼猜想不像“乍看起来那么简单”。

293° 给《纪事》的论文

西格尔有一次为《数学纪事》审稿，发现论文有一部分是错误的，而且写得拐弯抹角，就建议拒绝发表。希尔伯特是杂志主编之一，把论文退给西格尔，说他有责任发表这篇文章，因为作者是1910年为他颁发博莱奖的委员会成员。他请西格尔“修补需要修补的地方”。于是，西格尔修改润色论文，在《纪事》发表了。希尔伯特没再对西格尔说什么。不过几个月后，西格尔收到一个闵可夫斯基两卷文集的包裹，文集题词写着“致以编者的美好祝愿”。

294° 小男孩范德瓦尔登

有个故事说，范德瓦尔登（生于1903年）小的时候，父亲（一个中学老师）拿走了他的数学书，觉得孩子应该出去和别的小朋友玩儿。后来父亲发现儿子完全靠自己创立了三角学，还为那些三角函数设计了自己的名字和记号，就把书还给他了。

295° 格罗梅是如何走进数学的

哥廷根有个立陶宛学生，他学数学的理由与众不同。他叫格罗梅（Jacob Grommer），患了肢端肥大症，那是一种慢性神经性疾病，表现为四肢肥大。格罗梅原打算读一所犹太学校，做一个拉比（犹太学者）。但根据他成长的欧洲传统，新拉比要娶前任拉比的女儿。当老阿比的女儿看到格罗梅怪异的四肢时，拒绝和他结婚。他的拉比生涯这样结束了，就来数学寻求安慰。

格罗梅写了篇才华横溢的文章，但因为技术原因没有被接受为博士学位论文。所谓技术原因是说格罗梅没有高中文凭（他读的是犹太学校，没进过高中），不具备授予博士学位的资格。希尔伯特受理了格罗梅的事情，他指出，如果没有高中文凭的学生都能写出像格罗梅那样水平的文章，那就有必要通过一项法令，禁止授予高中文凭。格罗梅最终获得了哲学博士学位。

其他德国数学家

纽曼（Franz Ernst Neumann，1789～1895）是哥尼斯堡大学应用数学学派之父，他在那儿开创了研究班模式，建立了德国大学里的第一个理论物理研究所。斯德丁的格拉斯曼（Hermann

Gunther Grassmann, 1809～1877）为把代数从传统形式中解放出来，发挥了巨大的历史作用。柏林大学数学教授库默尔（Ernst Eduard Kummer, 1810～1893）几乎成了数论的代名词，他引进了理想数概念。克罗内克（Leopold Kronecker, 1823～1891）是库默尔在高中和大学的学生，也在柏林大学教书，是卓有成就的代数学家，也是数学算术化的积极鼓动者。福克斯（Lazarus Fuchs, 1833～1902）是柏林大学另一个数学教授，专业是线性微分方程理论。汉堡的布拉施克（Wilhelm Blaschke）生于1885年，是有影响的几何学家，写过几部几何领域的经典著作。莱比锡的戈布（P. Koebe）是分析学家。

296° 科学发现的奖励

有个时期，一个重要的学术团体曾致力于制定科学发现的奖励规范。多才的纽曼那时差不多是百岁老人了，有许多发现都没发表出来，他说："最伟大的奖赏就在于做出发现；是否被认可对它来说是无关紧要的。"

297° 泄气

1844年，格拉斯曼出版了他的重要著作《扩张论》（*Ausdehnungslehre*）的第一版。不幸的是，格拉斯曼不善解说，当时的人都不明白他的模糊表述。1862年经过重写，几乎也并不怎么成功。科学界的漠不关心，令格拉斯曼非常泄气，于是放弃了数学而改行研究梵文和文学，他在那个领域写出了许多卓越的论文。

298° 库默尔的微笑

库默尔是思想广博而极富创造力的数学家，和当时的传统德国人一样，生性懒散，活泼幽默，单纯率真。他的出名在于他讲课就像说家常话，带着泰然的微笑。有一次，为了强调某个表达式中一个特殊因子的重要性，他说："如果你忽略了这个因子，就像吃李子时把核吞下而把果肉吐出来了。"

299° 库默尔意外获奖

库默尔得过一个他没有去竞争的奖项。1853 年，法国科学院举行了一次竞争"大奖"的活动。竞赛没有收到值得获奖的作品，延续到了 1856 年，结果还是只收到些低劣的论文。于是，1857 年，大赛决定把奖颁给库默尔，以表彰他对单位复根的研究——其实，他并没把那篇论文交给科学院参赛。

300° 师生情谊

在库默尔手下做过研究的人都会念念不忘他是一个良师益友。很多故事都讲了他对学生的感情和关注。有一次，一个穷学生正好在博士考试前突然得了天花。年轻人不得不先考试，然后回他靠近俄罗斯边境的波森（Posen）老家。库默尔没有那个不幸学生的消息，担心他在家里不能负担必需的医药费，就找到他的一个朋友，给他钱，让他去波森看看能帮什么忙。

301° 库默尔的最后 9 年

库默尔的最后 9 年都过着悠闲的退休生活，身边只有 9 个健在的孩子。除了几次重回儿童时代的故地，他完全远离了数学，

远离了人群。有一次患了流感，不久就去世了，享年 83 岁。

302° 忘忧果

克罗内克说，做数论的数学家就像吃了忘忧果的人——一旦尝过它的滋味，就再也放不下了。

303° 创造的热情

柏林的福克斯有一点很像西尔维斯特：很少提前备课，而是在现场发掘材料。两个大数学家的学生真是幸运，能经常地目睹数学在大师的手下被创造出来。

304° 布拉施克的污点

汉堡的布拉施克教授是杰出的有创造力的几何学家，写过很多卓绝的几何教科书。但他有一个污点，曾热情支持纳粹，写文章嘲笑美国数学。他蔑视伟大的普林斯顿数学学派，称普林斯顿是“一个黑人小村庄”。

305° 不朽

传说，以函数论出名的莱比锡数学家戈布，看到达·芬奇的壁画《最后的晚餐》毁坏严重，不禁大叫：“太可悲了！这幅画要完了，而我那个解析函数单值化定理却将永存!”

什　锦

我们下面这道“什锦拼盘”由三样东西杂烩在一起——数学家、数学和一点儿杂忆。

306° 逃避

有人发现，数学家总是比许多其他人更能承受家庭和个人的悲剧，似乎他们被思想占据的头脑使他们获得了更强大的适应生活变故的力量。闵可夫斯基大胆指出，这种解释是不对的，实际情况却是，数学家只不过是在通过他们的工作来躲避悲伤。

307° 失落的数学家

许多大数学家，如克莱因和哈代，都曾经历过极度消沉的时期。柯朗认为这是很自然的，因为任何从事创造的人几乎都有感觉无力的时候。这一时的打击，自然令人心灰意冷。

308° 数学追求的精神

我们的数学知识和真实世界的知识沿着螺旋的圆圈增长。这令人想起刻在雅各布·伯努利墓碑的格言 *Eadem mutate resurgo*

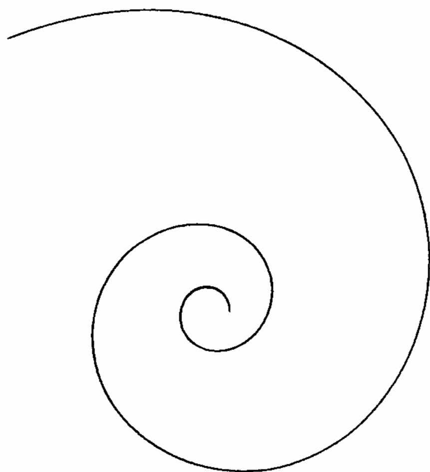


图 65

(“纵然改变,我重生如故。”)和下面的对数螺线(图65)。这曲线和格言也是数学和科学追求无限扩张和不断变化的精神写照。

309° 测试

“我总是遇到一些人无端怀疑他们的[数学]潜能。首先测试一下，你是否能从几何中得到某些东西。不喜欢或不能与其他[数学]科目打交道，其实是无关紧要的；开始之前难免需要经过艰苦的磨炼，而哪怕天生的数学家，也可能被恶劣的教学训练成白痴。”(里特伍德)

310° 真理

“再能干的人也可能不会创造。”(里特伍德)

311° 先驱的工作是笨拙的

“一个数学家的名声在于他做出了多少坏的证明。”(贝塞科维奇)

312° 如何赢得战争

那时候，战争既是军人赢得的，也同样是数理科学家赢得的。今天的数理科学家们现了本色，不可救药地沉溺于一个个难题。例如，据估计，在第二次世界大战时期的英国，有趣的“假币问题”[5] 就浪费了科学家们大约10 000 人·小时的劳动。那么，为什么不给敌国丢下不同的新的挑战性难题，从而解散他们的数学家队伍呢?

5 例如:(1)某人有12个硬币,看起来都一样,但有一个假的,重量与真币不同。他手头只有一个天平,但没有砝码。他怎样才能不超过3次而称出假币,并说明它是重还是轻?(2)给定31个硬币,其中只有一个假的,重量不同于其他30个真币。给一个弹簧秤,称5次决定哪个是假币,并确定假币和真币的重量。(3)众所周知,Lower Slobbovia是极端贫穷的国家,自己不能造币。有 N 个造币者根据政府规定制造他们的流通货币 Rasbuckniks。不过,政府怀疑有人在合金里掺进了贱金属。尽管和真币略微不同,但任何一对假币的重量都一样。每个造币者要么全做真币,要么全做假币。现在,用一组无限精确的砝码、一个天平和满足需要的每个造币者的硬币,如何称三次来确定哪些是假币?(原注)

313° 希腊人与欧洲基督徒

萨摩斯的阿利斯塔克斯（Aristarchus of Samos，310～230B.C.）比哥白尼早1800年就预见了太阳系理论。比较古希腊人和后来的欧洲基督徒对这个理论的反应，是很有趣的。阿利斯塔克斯同时代的人把它作为一个可能的假说而进行科学的讨论，最后因为没能观测到理论的某些结果（如恒星视差）而认为它不合理。哥白尼时代的人们声讨那个理论，迫害相信它的人，因为它把人从宇宙的中心地位驱除出来了。

314° 希腊人与罗马人

关于阿基米德之死（见《走进数学圈》77），哲学家怀特海指出了希腊人与罗马人的思想之间的区别，他说："没有一个罗马人是在思考几何图形时死的。"

贝克曼（Peter Beckmann）将创造历史的人分成两类，思想者与暴徒。希腊人是思想者，罗马人是暴徒。一般规律似乎是暴徒总是赢家，但思想者比他们更长存。

315° 数学罗盘

若干年前，伊尔斯（Walter Crosby Eells）按照卓越程度列举了100个最著名的数学家。[6] 伊尔斯选择所谓的"空间方法"作为他排名的方法，各数学家的著名程度仅凭他在世界的某些标准百科全书和传记词典中所占的总篇幅来决定。他的名单从第1名的牛顿排到第100名的芝诺。在本卷开头的罗盘图中，读者从正北开始按顺时针方向，可以看到伊尔斯列举的前32个数学家的名字缩写，感兴趣的读者还可以在查阅伊尔斯的那篇文章之前，

6 见他的论文"100个最著名的数学家"，《数学教师》，1962年11月，582～588页；也见《走进数学圈》254。（原注）

猜猜那些名字都是谁。

316° 数学的国际主义

我们今天熟知的“绝对微分”源自一篇基本论文“绝对微分法及其应用”，是意大利数学家里奇（G. Ricci）和列维－齐维塔（T. Levi-Civita）用法语写的，发表在德语杂志《数学纪事》第54卷（1901）——真是数学国际主义的一个光辉典范。

317° 演奏家与作曲家

大音乐家要么是大演奏家，要么是大作曲家，只有少数人两者兼得。同样，大数学家要么是理论的应用者，要么是理论的创造者，只有少数人两者兼得。例如，欧拉基本上是一个伟大的理论应用者，拉格朗日是伟大的理论家，而高斯是卓越的理论家兼理论的应用者。于是，欧拉就像海菲茨（Heifitz），拉格朗日像贝多芬，而高斯像巴赫（John Sebastian Bach）。

318° 形式与深刻

“对漂亮公式和优美定理的追求无疑会堕落为一种无聊的陋习，对严格一般性的追求也将是同样的下场，实际上它们确实太一般了，不可能用于任何特例。”（贝尔）

319° 说自由

在一个数学分支里，一旦选定了一组一致的假定，就可以完全自由地发展那个分支。换句话说，数学有限制的自由——服从一组和谐的基本法则的自由。任何创造性艺术也是如此。水彩画家和油画家是自由的，但要服从它的形式；管弦乐作曲家是自由

的，但要满足它所服务的乐器。诗人是自由的，但他的语言要合乎语法，句子要遵从格律。一句话，任何创造的自由都有一定的基本约束；创造的使命就是用这些有目的的限制的自由去获得新的重要的东西。没有基本法则限制的自由将是一片混乱，也就几乎不可能有创造力。想随心所欲地做任何事，就等于什么事也做不了。

320° 数学与其他艺术的区别

兰佐斯表达过下面的思想。

多数艺术，如绘画、雕塑和音乐，都令大众动情。那是因为我们能感受这些艺术。数学艺术就不同了，它只有数学家能欣赏，而要成为一个数学家需要经过长期艰苦的训练。数学家群体就像一个假想的作曲家群体，他们只有在与自己的乐谱的交流中才能得到满足。

321° 红杉树

维纳表达过下面的思想。

红杉树林的价值不在于今天的木材公司能靠它赚钱。那样赚来的钱会很快用完，而杉树林也将永远消失。红杉树林的价值就在于它在漫长的岁月里与人类共存，砍伐杉树做木材，就是出卖我们的未来和我们子子孙孙的未来。

同样，学者的大学的价值也不能用它今天耗费国家或政府的金钱来衡量。现代学者们的多数发现都难得有机会回报那些出钱的人。学者大学的价值在于它对人类的长久利益，放弃今天的大学就等于出卖我们的未来和我们子子孙孙的未来。

因此，不论红杉树的价值还是学术传统的价值，都不能用当

下的金钱来衡量，而在于让人们相信，树木的持续存在和知识的持续发展是协力促成人类幸福的好事。

322° 一个遗传学定律

学术界里有着太多的例子，都是数学家和他教授的女儿结婚，于是形成一个数学家能力的遗传学定律："数学能力不是从父亲遗传给儿子，而是从岳父遗传给女婿。"

323° 作弊

数学考试时，一个同学抄另一个同学的试卷，被当场发现，他辩解说："我只是想加深印象。"

324° 等价与等式

尽管 $\sin x = O(1)$ 是对的，但 $O(1) = \sin x$ 就错了。

"诚实是处世的最佳原则。"因此，如果一个人是为了自己的好处做事情，那他一定是诚实的。

325° 建议与答复

瑞普莱（Ripley）的《信不信由你（第15辑）》讲了一个格里尔（Robert Greer）的故事，他是英格兰约克郡山峰中学的数学老师。1880年，他向一个叫安妮的女孩儿提出：

"如果 $R = 1/2$ 和 $A = 1/2$，

则 $R + A = 1$，

但 $R - A =$ 什么都没有。"

他听到了令人高兴的答案："那就让它等于 $R + A$ 吧。"

326° 关于大数

百万、十亿和万亿的相对大小，通过下面的对比能更加清楚：一百万秒大约等于 12 天，十亿秒大约 32 年，万亿秒大约 3 万 2 千年。

327° 依存关系

1938 年 4 月 26 日，赫德里克（E. R. Hedrick）在新墨西哥阿尔伯克基（Albuquerque）向美国数学会西南分会和美国科学促进会西南区数学部发表了题为“基础教学和高等数学中的函数概念”的讲话，其中有一段如下的有趣论述：

> 函数相关性的明显事实需要聪明的思想，这可以用一个例子来好好说明。在若干个世纪里，罗马皇帝的工程师修筑沟渠，为城市生活和农业灌溉供水。供应的水量只用放水口的尺寸来确定。显然，达·芬奇第一个发现了经过开口的水量还依赖于压力（“水头”），他还提出了工程师们至今还在应用的近似公式。在我国，直到 19 世纪下半叶，灌溉用水都还以“英寸”（即每平方英寸的渠口）来度量，而不考虑水的压力；结果，特别在加利福尼亚，引发了许多用水的法律纠纷。我把这作为一个显著的例子，说明人们（即使非常聪明的人）有时没能注意一个量对另一个量的依存关系。

328° 阿方索星表

西欧最早的主要三角函数工作是对托勒密行星表的修正。这项工作是 1254 年在西班牙统治者阿方索十世（Alfonso X）领导

下在托莱多（Toledo）完成的。修订的星表得到后世天文学家的高度赞誉，被称为《阿方索星表》，这样，数学史留下了一个值得纪念的知识倡导者的名字。

329° 坏消息

数学老师向学生宣布马上要考试，可他先在黑板上写“羚羊”，然后说：“羚羊太太在先生来孕妇病房看她时说：‘我要为你生小羚羊了。’”接着他才说，下次班会时进行教材前两章的数学测验。

330° “吃掉的”证明

图 66 的定理和证明是在一堂数学课的黑板上看到的。(Roger Hough)

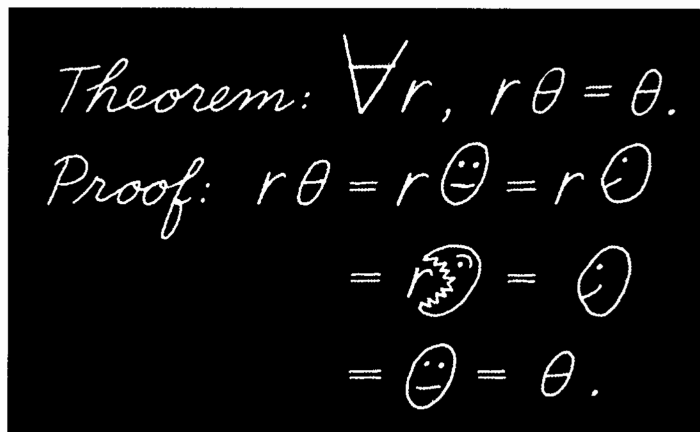
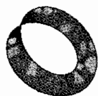


图 66

331° 橡树果的话

刚发芽的橡树果说：“哎呀，我是一棵树！”（几何）[7]

7 原文是 “Gee, I'm a tree.” 大致与 “Geometry”（几何）同音。



332° 革命的卫星

1957 年 10 月 4 日，俄罗斯人发射了第一颗人造地球卫星，到 1958 年 1 月 4 日落地之前，它以每小时 18 000 英里的速度运行，每 95 分钟绕地球一圈。从此俄罗斯和美国发射了很多卫星，有的还载着人或动物（如猴子、小狗）。据非官方消息，俄罗斯正考虑把载着两头奶牛的卫星送上环绕地球的轨道，这样，他们就在某种意义上超过美国了，因为如果这个计划实现了，它就是“把百姓送上了天”。(Robert A. Estes)[8]

8 牛当然属于 herd，而“The herd”又有“普通百姓”的意思。

333° 科学的王后

我们 MIT 数学系的帕萨诺（L. M. Passano）教授还精通文学。作为人文主义者，他反对数学系把应用数学放在首位。他在备忘录中写道：“这股潮流会使科学的王后堕落成科学的妓女。”（斯特洛伊克）

334° 偶然的不朽

拉马努扬 16 岁时，偶然看到一本卡尔（Carr）的《数学纲要》。一次邂逅为这本书赢得了不朽的名声，因为正是它立刻唤起拉马努扬走进了数学，差不多是他所有分析和数论知识的来源。它为拉马努扬后来成为“公式批发商”指明了方向，也为他后来的深入研究埋下了种子。

335° 斯科普斯审判

著名的田纳西州斯科普斯审判的事实，一般都是像下面那样记述的：

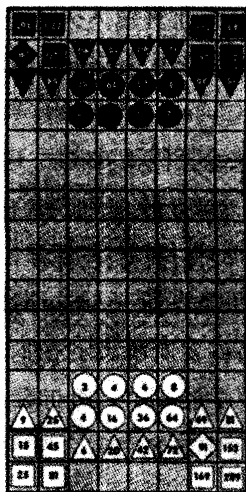
1925年3月，田纳西州立法机构通过一项法令，禁止在州内任何公立中小学宣讲“任何否定《圣经》关于神造人类故事的理论”。这项法令当然是针对在教育界流行的达尔文进化论。几个月后，戴顿中学的生物老师斯科普斯（John T. Scopes）被指控向学生灌输进化论，违反了刚通过的法令，因而在7月10日被送上法庭。州总检察官充当起诉人，一个善于雄辩的正统基督教徒布赖恩（William Jennings Bryan）为助理。辩护人以著名律师达娄（Clarence W. Darrow）领衔，助手是海斯（Arthur G. Hays)。经过11天令国人嘲笑的审判后，斯科普斯被认定有罪，判罚100美元。5天后，布赖恩突然在戴顿学校死了。两年后，1927年，州上诉法院重新审核案子，推翻了原来的判决，从而避免了走上美国最高法院的尴尬。

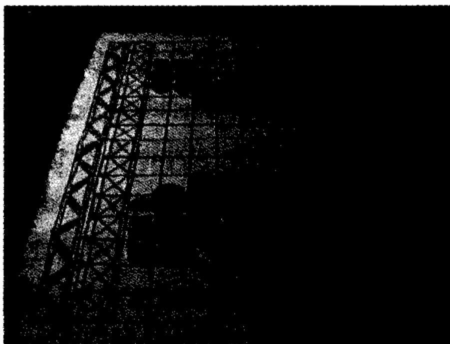
上面的说法不完整，也不准确。首先，斯科普斯是戴顿高中的数学和物理教育老师，一生从未上过一天的生物课。其次，斯科普斯是自愿接受审判的，为的是给教育部门树立一个荒唐法令的案例。1970年斯科普斯去世时，NBC广播电视的晚间新闻公开了这些不为大众所知的情况。

336° 跛足的赫尔曼

斯瓦比亚伯爵沃尔弗拉德（Wolverad）有个儿子赫尔曼(Hermann)，生下来（或小时候）就瘫痪了，不能说话，双手瘫软，两腿扭曲，也不能活动。但不幸的孩子却成了著名的天文学家、数学家、钟表师和乐器制造者。因为四肢收缩了，他给自己起名为Hermann Contractus，意思是“跛足的赫尔曼”。他在赖谢瑙（Reichenau）僧侣学校接受教育，后来成为本笃会修士，讲授数学，吸引了大批学生，还写过著名的关于星盘、算盘和

"斗数游戏"的书。[9]





9 "斗数游戏"(rithmomachia, rithmo = arithmetic; machia = battle)是中世纪流行在哲人们中间的一种类似下棋的数字游戏，16世纪时 Jean de Boissiere 出版了游戏规则。赫尔曼第一次修改并补充了前人的规则，还加入了音乐理论。

斗数游戏

印刷工和图书

在走完这一圈之前，我们也许应该讲几个与数学文章和图书的印刷有关的故事。这是一个小单元。最后几个故事说的是数学书里的玩笑。这种故事通常不友好或者不文雅。感兴趣的读者可以在斯特洛伊克《数学之源：从1200到1800》(*A Source Book in Mathematics*, 1200-1800，哈佛大学出版社，1969)的最后一页关于"密切"概念的推广中，看到另一个例子。斯特洛伊克博士说，那故事是他本人的一个小笑话；根据悠久的传统，他没有翻译它。

337° 认真的编辑

列文斯派尔(Octave Levenspiel)讲过一个作者(也许是他

自己）的故事，说他在初等数学教科书的习题里用了三个名字 Lurch、Reel 和 Stagger 的角色。出版社的文字编辑在检查索引时，在正文里看到了，认为那是三个“人物”。根据书的体例，索引记录全书所有人物的名和姓的第一个字母，于是编辑写信给作者，问那三个名字：“请写出姓的第一个字母。”

338° 打字员的错误

“There should be a more vigorous treatment of rectors.”[10]

339° 有问题的约定

有一个文字约定，10 以下的数字都用单词表示。这对数学来说有时并不合适。于是里特伍德引用了一个他曾经遇到过的可怕例子：“不能取值为零或一的函数”。

340° 语言怪癖

“集 E 是闭的”并不意味着“集 E 不是开的”，而“集 E 在 E 中稠密”也不等于“集 E 在自身稠密”，要语言学家来学这些东西，他一定会恼火的。另一方面，“比一更多”和“比二更少”的说法，也会令数学家不自在。

341° 见鬼的集合！

里特伍德说他偶尔大声读了一句“where E′ is any dashed set”,[11]觉得有必要注意重音。（原来，英国人读 E′为“E dash”，而不是“E prime”，对他们而言，“dashed”相当于美国人的“damned”，是一般的诅咒的词儿。）

10 这句“错话”的意思是“对大学校长们应该有更严格的处理。”最后一个字原来大概是 recto，意思是“书的正页应该有更严格的处理方法。”

11 “这里的集 E′是任意导数的集合”。

342° 读校样

读校样是枯燥乏味而又费力的差事，读校样的人经常会在出版后发现遗漏的错误，感到十分懊恼。哈代教授是一个细心的数学家，大概也是最能读数学校样的人。他和里特伍德结成了现代最有名的一对合作伙伴。他们合作 35 年，创作了大量优秀的论文。里特伍德有一次想考考哈代，请他找出他们合作的一篇论文里的印刷错误。哈代没找到。原来，是他自己的名字错印成了"G，H. Hardy"。

343° 排字工人

数学论文的排字工和印刷工之间常发生事故。1917 年，里特伍德为英国弹道学办公室写了个备忘录，结束的一句说："这个 σ 应该尽可能小。"草稿付印时，这句话消失了。有人读备忘录时问："那是什么?" 细看才发现在备忘录最后的空白处有一个小斑点，大概就是那个"尽可能小的" σ 了；排字工想必是跑遍了伦敦才得到那个符号吧。

我们倒想知道，假如一句话是"这里的大 X 很小"，排字工该怎么办呢?

344° 影子作者

在米尔恩（W. P. Milne）的"诺特的正则曲线"一文里（*Mathematical Gazette*，XIV，23），有一个作者的注释，参阅"Guyaelf 的文章（*Proc. London Math. Soc.*，ser. 2，21，part 5）"。Guyaelf 是米尔恩自己用的一个假名。

345° 不友好的索引

在克雷加托（B. M. de Kerekjarto）的拓扑学教程（*Vorlesungen uber Topologie*）中，索引有一处参考贝塞尔－哈根。在相应的那页里，并没有提到贝塞尔－哈根，不过有幅插图（No. 27），一个像人面的东西，长着两个大耳朵。贝塞尔－哈根是个沉稳热心的青年，在哥廷根恶劣的氛围下，很容易成为人家的笑柄。（见《重游数学圈》R314。）（斯特洛伊克）

346° 又一个不友好的索引

在贝尔的《数学发展》中，索引中有一处参考445页的米勒（G. A. Miller）。在那页找不到米勒的名字，只是在评论"勤勉的劳工比数学文盲高明不了多少"。（斯特洛伊克）

347° 威森伯克的"不变量理论"

威森伯克（R. Weitzenbock）是美国教授，在奥地利做过军官，还是反法斗士。假如把他的《不变量理论》引言的每句话的第一个字母取出来，就组成一句："Neider mit den Franzosen.（打倒法国人）"（斯特洛伊克）

心　理　学

1902年和1904年，瑞士的一个致力于数学教育的刊物《数学教育》（*L'Enseignement Mathematique*）就数学家的工作方法和习惯做了一次问卷调查。问卷包括30多个问题，寄给了许多数学家。100多个接受问卷的数学家及时给了回复。那些回答连同

它们所代表的特征和趋势的分析，写成一个 137 页的研究报告，于 1912 年发表。这项工作对任何关注数学家心理特征的人来说都有着重大意义。更近的时候（1945 年），阿达玛出版了一本极好的 136 页的论著，《数学领域中的发明心理学》。[12]

12 此书有中译本（《数学方法论丛书》之一），陈植荫、肖奚安译，朱梧槚校，江苏教育出版社，1988。

348° 高斯的经历

高斯曾说起他多年未能证明的一个定理："最后，两天前，我成功了——不是因为我的艰苦努力，而是靠上帝的恩赐。像一道闪电划过，那疑难立刻就解决了。我说不清楚到底是什么导线把我以前知道的和使我成功的东西联系起来了。"

还有一次，高斯在直觉的灵感闪过之后，大声地说："我有结果了，可我还不知道是怎么得到它的。"

（参见《走进数学圈》329）

349° 哈米尔顿的经历

《走进数学圈》338 讲过哈米尔顿的故事：在为四元数乘法绞尽脑汁 15 年后，他突然冒出一个非正统的念头，放弃传统的乘法交换律。事情发生在 1843 年，哈米尔顿 38 岁，而且已经做了两年的爱尔兰皇家科学院院长。后来他向儿子描述了自己的发现，读来饶有趣味：

> 10 月 16 号那天正好星期一，是皇家科学院开理事会的日子，我步行去主持会议，你妈妈和我沿着皇家运河走着，她原来大概是驱车去的。尽管她不时和我说话，一股思想的潜流却在我头脑中涌动，带来了最后的结果，我立刻就感到了它的重要，这样说它一点儿也不过分。仿佛电流接通了，

闪出一个火花，预示着（正如我立刻就预见了的）未来漫长的年月，会出现许多在它指引下的思想和工作，也许是我的（假如有时间的话），而归根结蒂是别人的，但愿我能长久地活着传播那个发现。我抑制不住冲动——尽管有点儿失去理智——拿起一把小刀就在布鲁厄姆桥上用符号 i，j，k 刻下了我们的那个基本公式，也就是

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

它包含了问题的解决，当然，那刻写的符号早就消失了。但在那天的科学院日志里，留下了永久的记忆，它记录了下面的事实：在我后来的请求下，我获准在会议期间的第一次全会上宣读关于四元数的论文，读论文是在 11 月 13 日，星期一。

350° 庞加莱的经历

最有名、最常被引用的是庞加莱提出的数学发现中的“准备－沉思－觉悟”三步曲：[13]

我曾用半个月时间去努力证明不可能存在类似于我后来称为福克斯函数的那种函数。[14] 那时我还很无知。每天我坐在书桌前，一呆就是一两个小时。我试过很多组合，都没有结果。一天晚上，我一反常态地喝了一杯咖啡；我睡不着觉，一团团的思绪萦绕在脑子里；可以这样说，我感觉它们在碰撞，最后有一对结合在一起，形成一个稳定的组合。天亮时，我已经确立了一类福克斯函数的存在性，它们是从超几何级数导出来的。我只需要把结果写下来就行了，用了几个小时。

13 下面一段文字是庞加莱《科学与方法》第三章“数学创造”的片断。

14 “福克斯函数”也就是我们今天说的“自守函数”（就是在某些变换下保持不变的函数，一般常见的函数都是自守函数）。庞加莱在自守函数论的先驱工作最终还导致了费马大定理的证明。

接下来，我想把这些函数表达为两个级数的商；这个想法完全是有意识的经过深思熟虑的，它们与椭圆函数的相似启发了我。我问自己，假如这些级数存在，它们该有什么样的性质？我没费多大力气就构造出了级数，我称它们为福克斯函数。

后来我离开了当时居住的卡昂（Caen），参加矿业学校主办的地质旅行。旅行的紧张令我忘记了数学的劳累。到库唐塞（Coutances）后，我们乘车游览。就在我的脚刚踏上汽车时，突然闪出一个想法——显然我先前的那些思想没有一点儿是为它准备的——我用来定义福克斯函数的变换与非欧几何的变换是相同的。我没证明它；我没有时间，因为一坐上车，就又和大家接着聊起来。不过有个时刻我感觉完全有把握了。一回到卡昂，我就用闲暇时间证实了结果，这才安下心来。

接着我研究了某些算术问题，没有什么显著的结果，没想那样的问题会与我先前的研究有丝毫的关联。失败令我很恼火，就到海边待了几天，想些别的事情。一天，在沿断崖散步时，我又涌出一个想法——还是来得那样简单、突然而肯定——不定三元二次型变换也等同于非欧几何的变换。

回到卡昂时，我考虑了这个想法，导出了它的结果。二次型的例子表明，存在不同于对应于超几何函数的群的福克斯群；我发现我可以把 θ-福克斯函数理论用于那些群，从而存在不同于我那时仅知道的从超几何级数导出的 θ-福克斯函数。当然，我给自己的任务就是构造所有那样的函数。我展开了系统的进攻，攻克了一个个外围堡垒；但有一个堡垒很坚固，只有它陷落了，我才能占领整个阵地。但我所有的努

力只不过让我更认识了面前的困难，那真是难啊。所有这些工作都是有意识的。

这时我去了瓦莱里安（Valerien）山，要去那儿服兵役。这样我要做截然不同的事情。一天，穿过林荫道时，曾经阻碍我的那个难题的解决办法，一下子出现在我的面前。我没有立刻去深入它，而是等退伍以后才回到那个问题。所有的元素都具备了，我只需要把它们按一定次序组装起来。就这样，我一鼓作气写出了最后的论文，没有一点儿困难。

351° 阿达玛的经历

许多数学家都讲过与梦有着密切关系的现象，那就是在突然醒来的瞬间靠一阵灵感解决一个难题。法国数学家阿达玛（Jacques Hadamard，1865 ~ 1963）讲过一个发生在他自己身上的故事。有一天，好像一阵噪声突然把他吵醒了，接着，一个找寻多年的方法，在他没有任何思考的情况下猛然出现了，完全不同于他以前考虑的方向。

352° 失去兴趣

很多数学家都承认，在一个问题或思想解决后，会马上对它失去兴趣。不幸的是，这种“松懈”往往出现在应该记录那个方法的时候。显然，兴奋和兴趣在于对解的追求，而不在于把结果写下来。斯泰纳（Jakob Steiner，1796 ~ 1863）经常以惊人的速度发现新的几何性质，但受不了写证明的单调乏味，就这样，他的许多重要发现给后人留下好多疑难。（参见 S203。）

353° 数学梦

数学家的梦很少有被人描述的。不过美国数学家狄克森（Leonard Eugene Dickson，1874～1954）还是报道了一个有趣的例子。他的母亲和姨妈在学校是几何竞争对手，有一次她们曾通宵思考一个几何问题，但没有结果。那天晚上，狄克森的母亲梦到了那个问题，在沉睡中完成了证明，还说着梦话，她妹妹正醒着呢，就把答案记录了下来。第二天上午，妹妹在几何课上拿出了答案（那是正确的），而狄克森的妈妈还没想起来。

这令人想起玛丽亚·昂雅泽在梦游中做数学的故事（见《走进数学圈》273）。

354°“数学瘤”

德国数学家和颅相学家戈尔（Franz Joseph Gall，1758～1828）提出一个理论，任何特殊的才能都与大脑的特殊部位的良好发育有关，而大脑的那部分良好发育源于头骨对应部分的凸起。因此，一个人的才智可以从他的头的形状看出来。例如，所有创造性的数学家在头骨的某个确定的地方都有着一个“数学瘤”。解剖学家和神经学家的现代研究证明，戈尔的颅相学理论在生理学上是毫无道理的。

355° 奴仆，不是主人

发现与发明之间有一点区别。前者关乎已经存在而尚未觉察的事物；后者关乎觉察之前从未存在的事物。这样说来，哥伦布发现了美洲大陆，因为美洲在哥伦布到来之前已经存在了；爱迪生发明了电灯，因为在他造出之前电灯是没有的。

现在我们来看艺术与数学之间的差别。艺术家的作品是发明；作品在他创作之前是不存在的。数学家的认识是发现；在他认识之前那些法则已经存在了。一个数学真理，即使尚未被我们所认识，先前已经存在了，因而迫使想发现它的数学家必须沿着一定的路线。埃尔米特（Charles Hermite，1822～1901）的一句话说出了这个根本意思：“我们是数学的奴仆而不是主人。”相反，艺术家是主人，而不是奴仆。

356° 什么年纪？

《数学教育》杂志问卷调查的第一个问题是："就你的记忆，你是什么时候……开始对数学发生兴趣的？"这个问题收到93个回答：35个说在10岁以前，43个说在11岁和15岁之间，11个说在16岁和18岁之间，三个说在19岁和20岁之间，一个说在26岁。

357° 早晨还是晚上？

《数学教育》杂志问卷调查的第27个问题是：“你［做数学］是喜欢在早晨还是晚上？”答案不一定，不过揭示了一个有趣甚至重要的趋势。尽管有例外，但北方民族的数学家说他们喜欢在晚上工作，而拉丁民族的数学家喜欢在早晨工作。而且，在喜欢晚上工作的人中，开夜车常导致晚年失眠，结果，他们只好不情愿地把工作时间从晚上移到早晨。

358° 准备－沉思－觉悟

数学发现"三步曲"——准备－沉思－觉悟——也体现在日常生活中。经常发生这样的事情：在我们绞尽脑汁回忆某个人或地方的时候，总是想不起来，而在我们不想它的时候，它却突然冒

了出来。还有,我们常听人说:“等明天再说吧。”弗里德里克斯(Kurt O. Friedrichs)教授曾说:“创造性思想经常是在艰苦的脑力活动之后,在精神疲惫而身体放松的状态下,突然降临的。”

359° 两种发现

似乎存在两种发现。一种发现是,先有目标,然后思想从目标走向方法,就是说,从问题到答案。另一种发现是,思想从方法走向目标,就是说,思想先发现某个事实,然后为它寻求应用。在数学和其他领域,多数重要发现属于第二种。正如阿达玛说的:“实际的应用不是通过寻找得来的,我们可以说,文明的整个进步都依赖于那个原理。”数学中的一个明显例子是希腊人对圆锥曲线的详尽研究,大约过了 2000 年,开普勒才令人惊讶地将希腊人的发现用于太阳系行星的运动。物理学家和艺术家迪昂(Duhem)曾将阿达玛比作风景画家,先在画室里画一幅风景,然后走出画室到大自然去寻找和画一样的风景。

360° 思维曲线

“很好。现在,索莫斯先生,如果您愿意,我们想在庭院里走走。”

天色越来越暗,三个窗户的灯光从楼上照着我们。

“您的三只小鸟全都回窝了,”福尔摩斯抬头看着上面说,“喂!那是什么?好像有一个坐立不安呢。”

是那个印度人,他黑魆魆的轮廓突然出现在窗帘上。他正在屋里急促地来回踱步。

……

“……为什么他总在房间里走来走去呢?”

"那没什么。很多人在用心的时候都是那样的。"

——柯南·道尔《三个大学生》

和柯南道尔《三个大学生》里的那个印度人一样，许多学者发现，有规则和节奏的踱步能集中精神，刺激思维活动——就是说，"双腿是思想的车轮"。许多大数学家也都是这样的（例如见 S167 和 S234）。

显然，踱步最方便的地方就是自己安逸而不受干扰的书房。不过，如果在寻常的书房里踱步，踱步的曲线或路径，一定满足某些非常确定的要求。我们来考察一下这种思维曲线的要求。

1 曲线刚好在一个矩形范围内，这是常有的事情。根据是，夹在家具中的空间通常是矩形的，或者很容易变成矩形。

2 曲线是闭合的。这是显而易见的。

3 曲线应该是平面的。这一点没必要，不过是有道理的。因为产生非平面曲线很难，而且一个人在有规律、有节奏踱步时，不会想到一会儿爬上一会儿跳下。

4 曲线应该是连续的。当然，这在极限范围内也是不必要的。不过它也很容易满足。因为大致说来有两种不连续性：

a 曲线的无限分支导致的不连续。房间的维度和连续特征排除了这种不连续的可能。

b 曲线间断导致的不连续。如果有那样的间断，从人体生理原因看，它必然小于一个人的最大跳越距离。而且，因为突然的跳越违背了有规律、有节奏的踱步，我们实际上必须令这种间断小于人的正常步子的长度。而现在的情形是，曲线是闭合的，因而，除非小心翼翼地度量每一个步子，踱步者不太可能在走完一圈之后，刚好到达一个间断



点，然后跳过它走下一步。因此，走的曲线越长，那种间断的距离越小，最可能的事情就是使它变得连续。

5 曲线应该有连续的一阶导数（除了个别可能的无穷大）。踱步的规则和节奏排除了突然的转折。转折肯定是光滑的，从而曲线必然有连续的一阶导数。

6 曲线的曲率不应该超过某个数值，如 2.5 英尺的圆周的曲率。显而易见，任何大的曲率都会使曲线太“尖”，不适合有规律、有节奏的踱步。

7 曲线必须至少含有两个拐点。这是因为，如果曲线总是朝着一个方向弯曲，会令人眼晕的。而含有相反曲率的闭合曲线当然必须包含偶数个拐点，这正是我们说的。

8 曲线的对称性对踱步有好处，因为对称有助于规则和节奏。

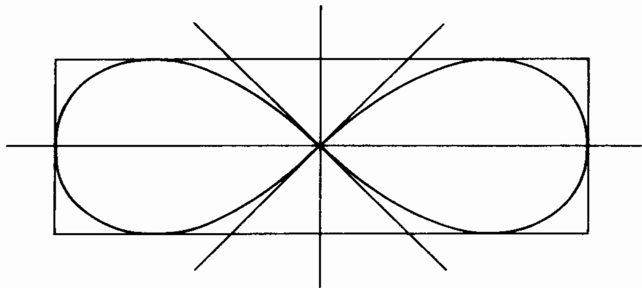
很幸运，我们在数学中找到了一条能满足以上所有要求的曲线——它确实是一条理想的激发思维的曲线。现在，我们就把伯努利的双纽线作为完美的思想曲线呈现给大家。[15] 曲线如图 67，其极坐标方程为

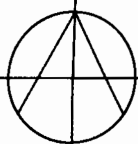
$$r^2 = a^2\cos2\theta$$

笛卡儿坐标方程为

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

15 英国的道森（Royal-Dawson）建议把伯努利的双纽线作为高速公路设计的过渡螺旋线。这样，双纽线不仅激发思想，还方便驾驶。（原注）


图 67



补　遗

数学美与
美的箴言

美 感

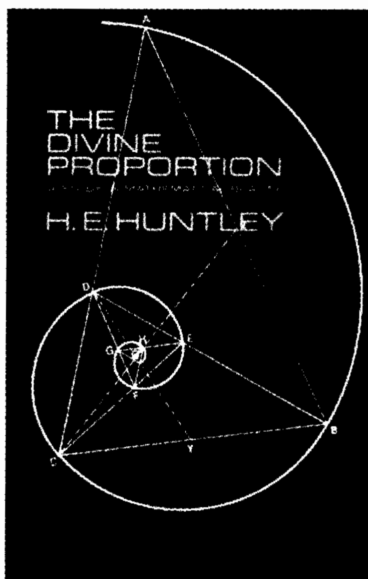
现在我们已经三进数学圈（《走进数学圈》、《重游数学圈》和《相约数学圈》)，一共讲了 1080（3×360）个数学故事和传说。现在我们又有了 9 个故事，都和数学美有关。这样，总数就达到了 $1089=(33)^2$，大于 1080 的第一个平方数。这样，我们就真正实现“化圆为方”了。

1081° 数学美的欣赏

[下面两个故事经允许改编自亨特利（H. E. Huntley）的迷人小书《神圣比例：数学美研究》（*The Divine Proportion, A Study in Mathematical Beauty*, Dover Publication, Inc., 1970.)]

对数学美的感觉是“传染”来的，它是自然得来的，而不是学会的。它感染那些有数学才能的人。我很清楚地记得它感动我的时刻，那时我还是布里斯托尔（Bristol）大学的学生。那是我一生难忘的经历。

已故的弗兰泽（Peter Frazer）是数学讲师，一个可爱的人和卓越的老师，曾和我们讨论交比。他飞快地在黑板上画了一个四条直线的扇形，用一条截线与它们相交，接着写出一个简短的方程。然后他走下讲台，看了看图。我当然记不清他说了什么，但还记得事情大概是这样的：他大踏步地在教室和黑板间走来走去，激动地挥舞着双臂，破旧发绿的长袍在他身后扬起舞动。他断断续续地说：“啊！好美的一个定理！美极了！……太美了！看看它吧！多简单！多经济啊！只有四条线和一条截线。”他的音调越走越高。“多优美啊！任何直线！任何截线！它的普遍性



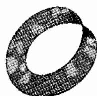
亨特利的书

真令人惊奇。”接着，他自言自语：“美啊！……真美！……”停下来，感觉有点儿尴尬（他来自阿伯丁），才回到现实中来。

学生们感觉好笑，但并不都那样。那强烈的激情的火花至少落到了一个人的身上。他也燃烧起来了，那火焰从未熄灭。

1082° 美学欣赏方法

有一次，在给六年级中学生基督运动会讲话时，我偶然说起毕达哥拉斯定理是“一个美丽的东西”。这句无邪的话引来一片嘲笑，令我非常惊讶。在我看来，同学们嘲笑的理由是非常简单的。每个人都知道我说的是对的，但承认它需要“掏出心窝子来”，六年级同学还“做不到”。我们很少听到从一个青少年的嘴里说出形容词“美丽”，他个人的感受不是拿来向大家展览的。



1083° 实践与美感

实践性是数学的一个重要特征，但在某一个时期有实践意义的数学，不一定在另一个时期还有用，而且大部分数学还几乎没有发挥用场。在科学中也能看到同样的情形。爱因斯坦声称，尽管世界可以通过理性来认识，但最终接受一个理论的标准是美学的（参见《走进数学圈》313）。狄拉克抱有同样的观点，他说："让我们的方程拥有美比让它们满足实验更重要。"

因此，我们在从事数学（也许还包括其他科学）的时候，应该更多关心它的美学价值，而不应抱有什么功利目的。

1084° 数学的吸引力

人们普遍相信，对数学美的鉴赏力是非常难得的，只有极少数人能敏锐地感觉到在数学中发现的美。但以数学为基础的游戏（如日本的围棋和俄罗斯的象棋）却广受大众欢迎，这似乎和那种观点矛盾。甚至有大量的文献，包括期刊和图书，专门研究某些游戏（如象棋和跳棋）的复杂变化。数学家用来描述特别好的定理或证明的那些形容词，也常挂在棋手的口中。于是，也可以说一局棋是"美的"，赢得"干净"，某些着数也很"精彩"。数学推理有着广泛吸引力的另一个证据是，数学谜题流行于各种报刊杂志的专栏，而每年还有数百万的人买数学的普及读物。如果在低年级上数学课时就强调数学的美学魅力，那么它将赢得更多的爱好者。

1085° 研究课题选择指南

因为重要的数学研究很少是直接为了实用目的而展开的

（见 S359），这就自然产生一个问题：数学家如何选择他们的研究课题？问题的选择当然很重要，我们可以根据它来判断一个研究者的数学境界。至于题目选择的恰当基础，毫无疑问应该是美的鉴赏力——即对什么是美的良好感觉。正如有文学品味和艺术品味，也有数学品味，而且有的人比别人体味更深刻、感觉更精细，也正是他们有可能发展更持久、更重要的数学。应用几乎总是随时出现的。

希腊人的圆锥曲线是长久而重要的数学，但那不是因为它有用（圆锥曲线的应用出现在几个世纪之后），而是因为它内在的美。希腊人能区别美的和不那么美的，因为这个本领他们才是了不起的数学家。印度人普遍缺乏这种能力，他们的数学良莠不齐，好的和坏的并肩出现。希腊人能选出好的，摒弃坏的——好的有美感，而坏的没有。

1086° 判断研究生

最令人扫兴的事情莫过于研究生跑来问他该研究什么题目。我们几乎立刻就可以看出，这样的研究生顶多算是二流的。如果一个学生进大学学了三四年的数学还不能发现有待进一步发展的有趣问题，他就不具备上面所说的对美的鉴赏力，因而注定是他那个领域的庸人。

1087° 一段历史

阿达玛在埃尔米特指导下写博士论文。当他把论文送去审查时，埃尔米特认为最好能找到一些应用。而阿达玛那时没有应用，也没想过应用。不过，在论文送审之后到认可之前的那段时间里，他明白了论文回答过的一个重要问题。就这样，他的论文



没有变得有用，说明了他纯粹感兴趣的是那个引他走上正确方向的问题的吸引力。

同样的情形也出现在阿达玛 1893 年关于行列式的美妙定理。7 年后的 1900 年，弗雷德霍姆（Fredholm）理论发现了那个定理的基本意义。

1088° 另一段历史

18 世纪，约翰 · 伯努利（Jean Bernoulli）对一种曲线发生了兴趣：不在同一水平面的两点间，粒子在重力作用下滑动的所需时间最短的曲线。那时吸引伯努利的是问题的优美和与众不同的性质。他没有（其实也不可能）想到，这种新型的问题（即“变分法”的结果）会在世纪之交的力学发展中起着举足轻重的作用。

1089° = [$(33)^2$] 美的箴言

下面引用的十段话证明了美感是数学发现的主要驱动力。

1 数学家的模式就像画家或诗人的模式，必须是美的；数学的思想犹如色彩和文字，必须以和谐的方式组织在一起。美是第一标准：世界没有给丑数学留下永久的位置。（G. H. Hardy）

2 可以说，正是与美学意识密切联系的策略——我们科学中惟一不能通过学习把握的策略，每个数学家不可或缺的禀赋——将指引数学家的思想，保证他们不把气力浪费在没有科学意义的问题和抽象晦涩的领域。（H. Hankel）

3 数学家在他工作的每一步都需要良好的技巧和品味，他必须学会靠自己的本能去鉴别他的工作中哪些是真正有意义的，哪

些是无关紧要的。(J. W. L. Glaisher)

4 像不可抗拒的魔力，把文艺复兴大师们（如布鲁内莱斯科(Brunellesco)、达·芬奇、拉斐尔、米开朗琪罗，特别是丢勒）吸引到数学科学的，不仅仅是对普遍文化的求索。他们深切地知道，尽情发挥个人幻想的艺术服从必然的规律，反过来，有着严格逻辑结构的数学也遵从美的法则。(F. Rudio)

5 可以说，数学家不仅拥有真理，还拥有至高的美——冷峻质朴的美，就像雕塑的美，无须求助我们任何薄弱的天性，没有绘画和音乐那华丽的诱惑，然而崇高和纯粹，只有最伟大的艺术家才能呈现那样的完美。(B. Rusell)

6 一个真正的数学家总是集众多角色于一身的人——艺术家、建筑学家，对了，还有诗人。(A. Pringsheim)

7 凡是研读过欧拉、拉格朗日、柯西、黎曼、S·李和外尔斯特拉斯的人，谁还会怀疑大数学家不是伟大的艺术家呢？(E. W. Hobbson)

8 数学有着自己的美——结果表现的对称和比例，没有一丝的多余，方法与目标的完美和谐，所有这些都令人惊奇，只有在最美的作品才能看到……当这个学科恰当地……呈现出来时，应该带来美的享受和精神的愉悦，而不是丑的憎恶和厌倦。(J. W. A. Young)

9 一种特别的美统治着数学王国，它不像艺术的美，而更像自然的美；它感动会思想的头脑，也和自然美一样，赢得思想者的欣赏。(E. E. Kummer)

10 一个人如果不能从数学看到诗歌，那他一定是个“实用的”人。(W. F. White)